Beschreibung euklidischer Rume mit Hilfe von Abstandsrelativen

Vom Fachbereich 11/Mathematik der
Gerhard - Mercator - Universitt
Gesamthochschule Duisburg
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Dr . rer . nat .
genehmigte Dissertation
von
Jessica Bushnaq
aus
Hilden

Referent: Prof . Dr . Arnold

Korreferent: Prof . Dr . Wefelscheidt

Tag der mndlichen Prfung: 16 . 11 . 1998

Prof . Dr . Hans Joachim Arnold
in Dankbarkeit gewidmet

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit zeigt eine Mglichkeit, eine euklidische Geometrie durch zwei relationale Gruppierungen zu definieren, die Richtungen und Abstnde der Geometrie beschreiben.

Der kleine Satz von Desargues, ein Schlieungssatz fr die Parallelogramme des Richtungsrelativs, wird als Axiom hinzugenommen.

Dieser Satz struktuiert bekanntlich eine affine Geometrie soweit, da auf algebraischer Seite eine Gruppe konstruiert werden kann.

Ein weiteres, sehr hnlich strukturiertes Axiom ber die Trapeze des Abstandsrelativs wird hinzugenommen (siehe **??**).

Schlielich kommen ein Schlieungssatz ber Geraden und Trapeze (**??**) und ein Schlieungssatz ber Parallelogramme und Trapeze (**??**) hinzu.

Die so aufgebaute Axiomatik ist strukturell etwas hnlich zum Aufbau eines Krpers aus zwei Gruppen plus den beide Gruppen verknpfenden Distributivgesetzen.

Im Kapitel **??** werden zunchst einige Definitionen und Stze aufgelistet, die ich im Verlauf der Arbeit brauche. Diese Stze stammen hauptschlich aus [?] [?] und [?].

In den Kapiteln **??** und **??** werden dann, ausgehend von einem Vektorraum mit euklidischer Norm, die Stze und Verhltnisse bewiesen, die spter die Grundlage meiner Axiomatik bilden werden.

Kapitel **??** stellt die Axiome des euklidischen Relativs vor. Dieses Kapitel ist der zentrale Punkt der Arbeit.

Die Axiomatik ist so angelegt, da sie nicht die inseparablen Ebenen der Ordnung 2 erfasst. (Diese Ebenen erfllen nicht das Axiom **??**, da Parallelogramme und Trapeze bei ihnen zusammenfallen.)

Es knnte im Bereich des Mglichen liegen, die Axiomatik entsprechend zu variieren. Dazu drften allerdings radikale nderungen im spteren Gang der Dinge notwendig sein - Geradenspiegelungen, so wie sie in dieser Arbeit definiert werden, entsprechen in diesem Fall der Identitt!

Sobald die Axiomatik feststeht, mu gezeigt werden, da diese neugewonnenen euklidischen Relative und die euklidischen Geometrien (inseparable Ebenen ausgenommen) tatschlich gleichwertig sind.

Des weiteren sollten wichtige Begriffe der euklidischen Geometrie - Spiegelungen, Drehungen, Winkel - auch fr das neue Begriffssystem verfgbar sein.

Dazu wird in Kapitel **??** zunchst die Trapezspiegelung eingefhrt (deren Konstruktion sich aus der Definition der Trapeze ergibt).

Wie der kleine Sattz von Desargues die Translationen, so strukturiert das Axiom **??** die Wirkung der Trapezspiegelungen.

Zur Trapezspiegelung kommt die - geometrisch blichere - Geradenspiegelung hinzu. Ihre Konstruktion ist mit den Mitteln der gegebenen Axiomatik etwas komplizierter als die der Trapezspiegelung.

Eine Drehung wird definiert als das Hintereinanderausfhren zweier Spiegelungen.

Im weiteren Verlauf der Arbeit habe ich mich oft an [?] orientiert, um die ntigen geometrischen Begriffe zu gewinnen. Definitionen, Stze und teilweise auch Beweisideen wurden bernommen und der neuen Axiomatik angepasst (Dreispiegelungssatz, Kreiswinkelsatz).

Im Kapitel **??** werden die Winkelrelationen mit Hilfe der Drehungen eingefhrt. (in [?] werden Winkel analog eingefhrt.)

Hat man den Winkelbegriff, so kann man - allerdings nur auf einer Ebene - Winkelbewegungen einfhren, die Geraden in Geraden und gleiche Winkel in gleiche Winkel berfhren. Diese Winkelbewegungen werden in Kapitel **??** eingefhrt. Mit ihrer Hilfe sollen aus euklidischen Relativen euklidische Geometrien konstruiert werden.

Eine geeignete Kombination zweier Winkelbewegungen fhrt auf die Dilatationen und mit Hilfe der Dilatationen der affinen Geometrie lsst sich ein Vektorraum konstruieren.

Nun mu noch eine Norm auf diesem Vektorraum konstruiert werden.

Dazu werden quadratische Dilatationen als Hintereinanderausfhrung zweier spezieller Winkelbewegungen definiert.

Als ich beweisen wollte, da die so gewonnene Dilatationsnorm tatschlich eine quadratische Norm ist, stie ich allerdings auf eine groe Schwierigkeit:

Solange ich in einer Ebene blieb, war der Beweis einfach zu fhren, auerhalb der Ebene aber konnten die Winkelbewegungen nicht mehr konstruiert werden.

Der Artikel [?] kam mir zu Hilfe: Hier wird eine quadratische Norm definiert, die auch im Raum beherrschbar ist.

Ich bewies, da die dort gegegebene Norm und die von mir konstruierte Norm tatschlich gleich waren und passte dann den Inhalt des Artikels meiner Axiomatik an. So entstand das Kapitel **??**.

Damit beschreibt das Axiomensystem des euklidischen Relativs tatschlich die euklidischen Geometrien. (Ausgenommen einige Flle der Charakeristik 2, in denen Parallelogrammschlu und Trapezschlu gleich sind und die daher mit anderen Mitteln untersucht werden mten.)

Es ist also mglich, Richtungen und Abstnde einer Geometrie als eng verwandte Begriffe zu betrachten, hnlich wie additive und multiplikative Gruppe eines Krpers eng verwandte Begriffe sind.

2 Grundlagen

Im folgenden sind einige Definitionen und Stze zusammengestellt, die im Verlauf der Arbeit gebraucht werden.

2_ I Relationale Gruppierungen und affine Relative

Def. 2.1 $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ *heie eine relationale Gruppierung, wenn gilt:*

I. $\mathcal{P} = \{A, B, C, \ldots\}$ *ist eine Menge, deren Elemente Punkte heien sollen.*

II. $\mathcal{R} = \{a, b, c, \ldots\}$ *ist eine Menge nichtleerer, symmetrischer zweistelliger Relationen auf* $\mathcal{P}$*. Fr die Gleichheitsrelation* o *gilt* $o \in \mathcal{R}$*.*

III. $$\bigwedge_{A,C\in\mathcal{P}} \bigvee_{b\in\mathcal{R}}^{1} A\,b\,C$$

Man schreibt dann $b =: AC$*.*

IV. $$\bigwedge_{A,B,C\in\mathcal{P}} AB \subset AC \circ CB$$

Es bezeichne

$$\mathcal{R}_{-o} := \mathcal{R} \backslash \{o\}$$

die Menge aller Relationen auer der Gleichheitsrelation.

Def. 2.2 *Eine relationale Gruppierung* $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$*, die zustzlich die Bedingung*

$$\bigwedge_{a\in\mathcal{R}} a \circ a \subset a \cup o$$

erfllt, heie ein affines Relativ.

Satz 2.3 *Zu jedem affinen Relativ* $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ *kann eine affine Geometrie* $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|)$ *folgendermaen gebildet werden:*
Es bezeichne fr alle Punkte $A \in \mathcal{P}$ *und alle Relationen* $b \in \mathcal{R}_{-o}$

$$\overset{g}{A}\,b := A\,b \cup \{A\}$$

die Gerade durch den Punkt A in Richtung b. Dann ist

$$\mathcal{G} := \{\overset{g}{A}b |\ A \in \mathcal{P}, b \in \mathcal{R}_{-o}\}$$

die Menge der Geraden und

$$\overset{g}{A}b \parallel \overset{g}{C}d :\leftrightarrow c = d$$

definiert die Parallelitt.

Satz 2.4 *Zu jeder affinen Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|)$ kann ein affines Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ gebildet werden, indem man setzt:*

$$\bigwedge_{A \neq B} C\,AB\,D :\leftrightarrow C \neq D \wedge g_{AB} \parallel g_{CD}$$

und

$$\mathcal{R} := \{AB \mid A \neq B \in \mathcal{P}\} \cup \{o\}$$

Satz 2.5 *Die beiden Verfahren aus Satz* **??** *und Satz* **??** *kehren einander um.*

Eine affine Geometrie ist genau dann nicht trivial ($\|\mathcal{G}\| > 1$), wenn im zugehrigen affinen Relativ $\|\mathcal{R}\| > 2$ gilt.

Wir nennen dann das affine Relativ nicht trivial.

2_ II Parallelogramme und der kleine Satz von Desargues

Def. 2.6 *$(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ sei eine relationale Gruppierung. Dann heit das Punktequadrupel $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}^4$ ein Parallelogramm, falls gilt:*

$$AB = CD \wedge BC = AD$$

Def. 2.7 *Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ eine relationale Gruppierung. Eine Abbildung*

$$\sigma := \begin{cases} \mathcal{P}^3 & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ (A, B, C) & \longmapsto & (A, B, C)\sigma \end{cases}$$

heie eine Parallelogrammabbildung und

$$\Pi_\sigma := \{(A, B, C, (A, B, C)\sigma) \mid A, B, C \in \mathcal{P}\}$$

die Menge der σ-Parallelogramme, wenn gilt:

I. *Alle Quadrupel aus* Π_σ *sind Parallelogramme.*

II. $$\bigwedge_{A,B\in\mathcal{P}} (A,A,B,B)\in\Pi_\sigma$$

III. $$\bigwedge_{A,B,C,D\in\mathcal{P}} (A,B,C,D)\in\Pi_\sigma \succ (C,B,A,D)\in\Pi_\sigma$$

IV. $$\bigwedge_{A,B,C,D\in\mathcal{P}} (A,B,C,D)\in\Pi_\sigma \succ (B,C,D,A)\in\Pi_\sigma$$

Satz 2.8 *Ist* $(\mathcal{P},\mathcal{R})$ *ein nicht triviales affines Relativ, in dessen zugehriger Geometrie der kleine Satz von Desargues gilt, so kann man eine Parallelogrammabbildung* $\diamond$ *folgendermaen definieren:*

$$\diamond := \begin{cases} \mathcal{P}^3 & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ (A,B,C) & \longmapsto & (A,B,C)\diamond \end{cases}$$

mit

$$(A,B,C)\diamond = A\,\overset{g}{AB} \cap B\,\overset{g}{BC}$$

fr $AB \neq BC$.

Gilt $AB = BC$, *so whle* $C' \notin A\,\overset{g}{AB}$ *und setze*

$$(A,B,C)\diamond = (C,(B,A,C')\diamond,C')\diamond$$

Die $\diamond$*-Parallelogramme werden im folgenden als desarguesche Parallelogramme bezeichnet.*

Def. 2.9 *Es sei* $(\mathcal{P},\overset{r}{\mathcal{R}})$ *ein affines Relativ, in dem der kleine Satz von Desargues gilt.*

Dann ist $(\mathcal{P},\mathcal{R})$ *mit*

$$C\,AB\,D :\succ\!\!\!\prec (A,B,C)\diamond = D \vee (A,B,D)\diamond = C$$

$$\mathcal{R} := \{AB \mid A,B\in\mathcal{P}\}$$

eine relationale Gruppierung.

$(\mathcal{P},\mathcal{R})$ *heie das zu* $(\mathcal{P},\overset{r}{\mathcal{R}})$ *gehrige Translationsrelativ.*

Def. 2.10 *Man sagt, eine relationale Gruppierung $(\mathcal{P},\mathcal{R})$ erflle den kleinen Satz von Desargues, wenn es eine Parallelogrammabbildung σ gibt, fr die gilt: Fr alle $A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3 \in \mathcal{P}$ gilt:*

$$(A_1,B_1,B_2,A_2),(A_2,B_2,B_3,A_3) \in \Pi_\sigma \succ (A_1,B_1,B_3,A_3) \in \Pi_\sigma$$

Satz 2.11 *Es sei $(\mathcal{P},\mathcal{R})$ eine relationale Gruppierung, fr die der kleine Satz von Desargues gilt.*

Dann kann man zu zwei Punkten $A,B \in \mathcal{P}$ eine Translation τ_{AB} folgendermaen definieren:

$$\tau_{AB} := \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ X & \longmapsto & \tau_{AB}(X) := (B,A,X)\sigma \end{cases}$$

Es sei die Menge der Translationen

$$\Theta := \{\tau_{AB} \mid A,B \in \mathcal{P}\}$$

Dann gilt fr alle $\tau \in \Theta$

$$AB = \tau(A)\tau(B)$$

$(\Theta,\circ)$ ist eine abelsche Gruppe mit ι als neutralem Element.

Die Translationen operieren scharf einfach transitiv auf $\mathcal{P}$.

Zu einer relationalen Gruppierung $(\mathcal{P},\mathcal{R})$, in der der kleine Satz von Desargues gilt, kann man eine Gruppe $(\mathcal{P},+)$ folgendermaen konstruieren:

Satz 2.12 *Es sei eine relationalen Gruppierung $(\mathcal{P},\mathcal{R})$ gegeben, in der der kleine Satz von Desargues gilt.*

Whle einen Punkt $O \in \mathcal{P}$ beliebig,aber fest.

Mit der Operation $+$ mit

$$A + B := \tau_{OA}(B) = (A,O,B)\diamond$$

ist dann $(\mathcal{P},+)$ eine abelsche Gruppe.

So wie der kleine Satz von Desargues desarguesche Gruppenpartionen auf affinen Relativen induziert, so induziert er schwach desarguesche Gruppenpartitionen auf relationalen Gruppierungen.(siehe [?])

2_ III Dilatationen

Def. 2.13 *Eine Bijektion δ auf der Punktmenge $\mathcal{P}$ eines affinen Relatives $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ heie eine Dilatation, wenn gilt:*

$$\bigwedge_{A,B \in \mathcal{P}} \delta(AB) = \delta(A)\delta(B) = AB$$

Satz 2.14 *Es gibt zu einem Fixpunkt F und zwei Punkten A, B hchstens eine Dilatation δ mit $\delta(F) = F$ und $\delta(A) = B$.*

Def. 2.15 *Bildet man zu einer relationalen Gruppierung $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ das folgende dreistellige Relativ $\overset{3}{\mathcal{R}}$:*

$$\overset{3}{\mathcal{R}} := \{ABC \mid A, B, C \in \mathcal{P}\}$$

$$(D, E, F) \in ABC :\Leftrightarrow DE = AB \wedge DF = AC \wedge EF = BC$$

so sagt man, auf $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ gilt die dreistufige Homogenitt, wenn gilt:

$$AB \subset ACD \ \phi \ CDB$$

Dabei bezeichne ϕ das innere Produkt der dreistelligen Relationen, das heit:

$$\begin{aligned} & (E, F) \in ACD \ \phi \ CDB \\ :\Leftrightarrow \quad & \bigvee_{X,Y \in \mathcal{P}} (E, X, Y) \in ACD \wedge (X, Y, F) \in CDB \end{aligned}$$

Satz 2.16 *In einer zu einem affinen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ gehrigen Geometrie gilt der groe affine Satz von Desargues genau dann, wenn $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ die dreistufige Homogenitt erfllt.*

Satz 2.17 *Ein affines Relativ erfllt die dreistufige Homogenitt genau dann, wenn gibt es zu jedem Punkt F und allen Punkten $A, B \neq F$ genau eine Dilatation δ mit $\delta(F) = F$ und $\delta(A) = B$ gibt.*

In diesem Fall kann man zu $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$ einen Vektorraum $(\mathcal{P}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}})$ folgendermaen konstruieren:

Satz 2.18 *Es sei ein nicht triviales affines Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ gegeben, in dem die dreistufige Homogenittsregel gilt.*

Whle zunchst einen Punkt $O \in \mathcal{P}$ beliebig, aber fest.

*Dann kann eine Gruppe $(\mathcal{P}, +)$ nach Satz **??** gebildet werden.*

$\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ sei die Menge der Dilatationen mit Fixpunkt O sowie die Nullabbildung.

Mit den Verknpfungen

$$\bigwedge_{\alpha,\beta \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}} \bigwedge_{A \in \mathcal{P}} (\alpha + \beta)(A) = \tau_{O\beta(A)}\,(\alpha(A))$$

und

$$\bigwedge_{\alpha,\beta \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}} \alpha \cdot \beta = \alpha \circ \beta$$

ist dann $(\mathcal{K}_{\mathcal{D}}, +, \cdot)$ ein Krper und $(\mathcal{P}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}})$ ein mindestens zweidimensionaler Vektorraum.

Satz 2.19 *Zu jedem mindestens zweidimensionalen Vektorraum $(\mathcal{V}, \mathcal{K})$ kann mit*

$$\mathcal{P} := \mathcal{V}$$

$$\mathcal{R} := \{AB \mid A, B \in \mathcal{P}\}$$

$$C\,AB\,D :\asymp \bigvee_{k \in \mathcal{K} \setminus \{0\}} k\dot{(}C - D) = A - B$$

ein nicht triviales affines Relativ gebildet werden, das die dreistufige Homogenittsregel erfllt.

Satz 2.20 *Die Verfahren aus Satz **??** und Satz **??** kehren einander um.*

Die Dilatationen auf $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ sind genau dann kommutativ, wenn der zugehrige Vektorraum kommutativ ist.

2_ IV Algebraische Definition euklidischer Geometrien

Def. 2.21 *Es sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum ber einem Krper $\mathcal{K}$. Eine Abbildung*

$$\| \| := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{K} \\ X & \longmapsto & \|X\| \end{array} \right.$$

die die folgenden Zusatzbedingungen erfllt:

I.

$$\begin{aligned} \bigwedge_{X,Y \in \mathcal{V}} \bigwedge_{k \in \mathcal{K}} \quad & \|X + k \cdot Y\| \\ = \quad & \|X\| + k^2 \cdot \|Y\| + k \cdot (\|X+Y\| - \|X\| - \|Y\|) \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} \bigwedge_{X,Y,Z \in \mathcal{V}} \quad & \|X + Y + Z\| \\ = \quad & \|X+Y\| + \|X+Z\| + \|Y+Z\| - \|X\| - \|Y\| - \|Z\| \end{aligned}$$

III. $\quad \bigwedge_{A \in \mathcal{V}} \|A\| = 0 \rightarrowtail\!\leftarrowtail A = 0$

heie eine euklidische Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{V}$.

$(\mathcal{V}, \mathcal{K}, \|\|)$ *heie eine euklidische Geometrie.*

Satz 2.22 *Es gilt fr jede euklidische Norm*

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{V}} \|-A\| = \|A\|$$

Def. 2.23 *Zwei euklidische Geometrien $(\mathcal{V}_1, \mathcal{K}_1, \|\|_1)$ und $(\mathcal{V}_2, \mathcal{K}_2, \|\|_2)$ heien isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung σ_V von $\mathcal{V}_1$ nach $\mathcal{V}_2$ und eine bijektive Abbildung σ_K von $\mathcal{K}_1$ nach $\mathcal{K}_2$ gibt, so das gilt:*

I. $\quad \bigwedge_{X,Y \in \mathcal{V}_1} \sigma_V(X+Y) = \sigma_V(X) + \sigma_V(Y)$

II. $$\bigwedge_{X\in\mathcal{V}_1}\bigwedge_{a\in\mathcal{K}_1}\sigma_V(aX)=\sigma_K(a)\sigma_V(X)$$

III. *Es gibt ein festes* $l\in\mathcal{K}_2\backslash\{0\}$,*so da gilt:*

$$\bigwedge_{X\in\mathcal{V}_1}\sigma_K(\|X\|_1)=l\,\|\sigma_V(X)\|_2$$

3 Richtungrelativ und Abstandsrelativ

Zu jeder euklidischen Geometrie $(\mathcal{V}, \mathcal{K}, \|\|)$ kann ein affines Relativ $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$ nach Satz **??** gebildet werden.

Mit Hilfe dieses affinen Relatives lassen sich die Richtungen in der euklidischen Geometrie $(\mathcal{V}, \mathcal{K}, \|\|)$ beschreiben.

Im folgenden wird das affine Relativ $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$, das zu einer euklidischen Geometrie gehrt, Richtungsrelativ genannt.

hnlich lassen sich nun auch die Abstnde der Geometrie durch Relationen erfassen:

Def. 3.1 *Es sei* $(\mathcal{V}, \mathcal{K}, \|\|)$ *eine euklidische Geometrie.*

Dann lt sich eine Menge $\overset{a}{\mathcal{R}}$ *von Abstandsrelationen folgendermaen definieren:*

$$\overset{a}{\mathcal{R}} := \{\overset{a}{A}B \mid A, B \in \mathcal{P}\}$$

mit

$$C \ \overset{a}{A}B \ D :\asymp \|C - D\| = \|A - B\|$$

Auf diese Weise kann bei einer euklidischen Geometrie zustzlich zu dem affinen Relativ $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$ nun ein weiteres Relativ $(\mathcal{P}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ untersucht werden.

Folgendes lt sich schnell feststellen:

Lemma 3.2 *Es sei* $(\mathcal{P}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ *das zu einer euklidischen Geometrie* $(\mathcal{V}, \mathcal{K}, \|\|)$ *nach* **??** *gebildete Abstandsrelativ.*

Dann gilt:

I. $(\mathcal{P}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ *enthlt die Gleichheitsrelation.*

II. *Alle Relationen in* $\overset{a}{\mathcal{R}}$ *sind symmetrisch.*

III. $$\bigwedge_{A,B \in \mathcal{P}} A \ \overset{a}{A}B \ B$$

IV. $$\bigwedge_{A,B,C,D \in \mathcal{P}} C \ \overset{a}{A}B \ D \succ \overset{a}{A}B = \overset{a}{C}D$$

Beweis zu **??**:
Zu **??**:
Sei $A \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben. Dann gilt fr beliebige $C, D \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} C\ \overset{a}{A}A\ D &\asymp \|C - D\| = \|A - A\| \\ &\asymp \|C - D\| = 0 \\ &\asymp C - D = O \\ &\asymp C = D \end{aligned}$$

Damit enthlt $\overset{a}{\mathcal{R}}$ die Gleichheitsrelation.
Zu **??**:
Es gilt fr beliebige $A, B, C, D \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} C\ \overset{a}{A}B\ D &\asymp \|C - D\| = \|A - B\| \\ &\asymp \|D - C\| = \|A - B\| \quad \textbf{??} \\ &\asymp D\ \overset{a}{A}B\ C \end{aligned}$$

Damit sind die Relationen von $\overset{a}{\mathcal{R}}$ symmetrisch.
?? gilt, da gilt:

$$\|A - B\| = \|A - B\| \ \succ\ A\ \overset{a}{A}B\ B$$

Zu **??**:
Es seien Punkte $A, B, C, D \in \mathcal{P}$ mit $C\ \overset{a}{A}B\ D$ gegeben. Dann gilt

$$\|C - D\| = \|A - B\|$$

Es seien nun Punkte $E, F \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} E\ \overset{a}{A}B\ F &\asymp \|E - F\| = \|A - B\| \\ &\asymp \|E - F\| = \|C - D\| \\ &\asymp E\ \overset{a}{C}D\ F \end{aligned}$$

Damit gilt: $\overset{a}{C}D = \overset{a}{A}B$
$\square$

Damit erfllt $(\mathcal{P}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ alle Eigenschaften einer relationalen Gruppierung bis auf die Homogenittsregel.

Im Verlauf des nchsten Kapitels werden wir sehen, da die Homogenittsregel auf $(\mathcal{P}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ ebenfalls gilt.

Dazu betrachten wir zunchst zwei fr die Arbeit mit Richtung und Abstand interessante geometrische Figuren - Parallelogramme und Trapeze.

4 Parallelogramme und Trapeze

Im folgenden sei stets eine euklidische Geometrie $(\mathcal{V}, \mathcal{K}, \|\|)$ gegeben.

$(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$ bezeichne das zugehrige Richtungsrelativ und $(\mathcal{P}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ das zugehrige Abstandsrelativ, so wie sie in Kapitel **??** definiert sind.

Die Parallelogramme auf $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$ (siehe Definition **??**) werden im folgenden Richtungsparallelogramme genannt.

Die Parallelogramme auf $(\mathcal{P}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ heien Abstandsparallelogramme.

4_ I Grundlagen

Def. 4.1 *Eine Abbildung*

$$\diamond := \begin{cases} \mathcal{P}^3 & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ (A, B, C) & \longmapsto & (A, B, C)\diamond \end{cases}$$

sei gegeben mit:

$$(A, B, C)\diamond := A - B + C$$

Ein Punktequadrupel (A, B, C, D) heie ein Parallelogramm der euklidischen Geometrie genau dann, wenn $D = (A, B, C)\diamond$ gilt.

Satz 4.2 *Ist (A, B, C, D) ein Parallelogramm der euklidischen Geometrie, so ist (A, B, C, D) ein Richtungsparallelogramm und ein Abstandsparallelogramm.*

Beweis zu **??**: Es sei ein Parallelogramm (A, B, C, D) vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} & D = A - B + C \\ \succ & D - C = A - B \\ \succ & AB \overset{r}{=} CD \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ll} & D = A - B + C \\ \succ & D - A = C - B \\ \succ & AD \overset{r}{=} BC \end{array}$$

Weiter gilt

$$\overset{a}{A}B=\overset{a}{C}D \quad \asymp \quad \|A-B\| = \|C-D\|$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\|C-D\| &= \|C-(A-B+C)\| \\
&= \|C-A+B-C\| \\
&= \|-A+B\| \\
&= \|A-B\| && \text{nach Satz \textbf{??}}
\end{aligned}$$

Ebenso gilt

$$\overset{a}{B}C=\overset{a}{A}D \quad \asymp \quad \|B-C\| = \|A-D\|$$

und

$$\begin{aligned}
\|A-D\| &= \|A-(A-B+C)\| \\
&= \|B-C\|
\end{aligned}$$

□

Alle Richtungsparallelogramme sind entweder Parallelogramme der euklidischen Geometrie oder Punktequadrupel, die auf einer Geraden liegen.

Es stellt sich die Frage, welche Abstandsparallelogramme es auer den Parallelogrammen noch gibt.

Def. 4.3 *Eine Abbildung*

$$\bowtie := \begin{cases} \mathcal{P}^3 & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ (A,B,C) & \longmapsto & (A,B,C)\bowtie \end{cases}$$

sei gegeben mit:

$$(A,B,C)\bowtie := \begin{cases} B + \frac{\|A-B\|-\|B-C\|}{\|A-C\|} \cdot (A-C) & frA \neq C \\ B & fr\ A=C \end{cases}$$

Ein Punktequadrupel (A,B,C,D) *heie ein Trapez genau dann, wenn* $D = (A,B,C)\bowtie$ *gilt.*

Satz 4.4 *Jedes Trapez ist ein Abstandsparallelogramm.*

Beweis zu **??**: Es sei (A, B, C, D) ein Trapez.
Angenommen, es gilt $A = C$. Dann gilt:

$$
\begin{array}{lcl}
\overset{a}{A}B = \overset{a}{C}D & \asymp & \overset{a}{A}B = \overset{a}{C}B \\
& \asymp & \overset{a}{A}B = \overset{a}{A}B
\end{array}
$$

und

$$
\begin{array}{lcl}
\overset{a}{B}C = \overset{a}{A}D & \asymp & \overset{a}{B}C = \overset{a}{A}B \\
& \asymp & \overset{a}{B}A = \overset{a}{A}B
\end{array}
$$

Damit ist (A, B, C, D) im Falle $A = C$ ein Abstandsparallelogramm.
Es sei nun $A \neq C$ angenommen. Dann gilt:

$$
\begin{array}{cl}
& \|C - D\| \\
= & \left\| C - \left(B + \dfrac{\|A - B\| - \|B - C\|}{\|A - C\|} \cdot (A - C) \right) \right\| \\
= & \left\| (C - B) - \dfrac{\|A - B\| - \|B - C\|}{\|A - C\|} \cdot (A - C) \right\| \\
= & \|C - B\| + \left(\dfrac{\|A - B\| - \|B - C\|}{\|A - C\|} \right)^2 \cdot \|A - C\| \\
- & \dfrac{\|A - B\| - \|B - C\|}{\|A - C\|} \cdot (\|A - B\| - \|C - B\| - \|A - C\|) \\
= & \|C - B\| + \dfrac{(\|A - B\| - \|B - C\|)^2}{\|A - C\|} \\
- & \dfrac{(\|A - B\| - \|B - C\|)^2}{\|A - C\|} + \dfrac{\|A - B\| - \|B - C\|}{\|A - C\|} \cdot \|A - C\| \\
= & \|C - B\| + \|A - B\| - \|B - C\| \\
= & \|A - B\|
\end{array}
$$

Damit gilt $\overset{a}{A}B = \overset{a}{C}D$.
Weiter gilt

$$\|A - D\|$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left\| A - \left(B - \frac{\|A-B\| - \|B-C\|}{\|A-C\|} \cdot (C-A) \right) \right\| \\
= \quad & \|A-B\| + \frac{(\|A-B\| - \|B-C\|)^2}{\|A-C\|} \\
+ \quad & \frac{\|A-B\| - \|B-C\|}{\|A-C\|} \cdot (\|C-B\| - \|A-B\| - \|A-C\|) \\
= \quad & \|A-B\| - (\|A-B\| - \|B-C\|) \\
= \quad & \|B-C\|
\end{aligned}
$$

Damit gilt $BC \overset{a}{=} AD$.
Damit ist (A,B,C,D) auch im Falle $A \neq C$ ein Abstandsparallelogramm.
□

4_ II Homogenitt des Abstandsrelativs

Fr die Trapeze gilt nun folgender Schlieungssatz, der dem kleinen Satz von Desargues sehr hnlich ist:

Satz 4.5 *Es seien Punkte $A_1, B_1, C_1, \in \mathcal{P}$ sowie $A_2, B_2, C_2 \in \mathcal{P}$ mit*

$$\|A_1 - B_1\| \neq \|B_1 - A_2\|$$

vorgegeben.

Weiter seien (A_1, B_1, A_2, B_2) und (B_1, C_1, B_2, C_2) Trapeze.

Dann ist auch (A_1, C_1, A_2, C_2) ein Trapez.

Beweis zu **??**: Da $\|A_1 - B_1\| \neq \|B_1 - A_2\|$ gilt, mu $A_1 \neq A_2$ gelten.
Damit gilt

$$
\begin{aligned}
B_2 &= (A_1, B_1, A_2) \bowtie \\
&= B_1 + \frac{\|A_1 - B_1\| - \|B_1 - A_2\|}{\|A_1 - A_2\|} \cdot (A_1 - A_2)
\end{aligned}
$$

Weiter gilt $B_1 \neq B_2$,da sonst ebenfalls

$$
\begin{aligned}
\|A_1 - B_1\| &= \|A_2 - B_2\| \\
&= \|A_2 - B_1\| \\
&= \|B_1 - A_2\|
\end{aligned}
$$

gelten mte.
Damit gilt

$$\begin{aligned} C_2 &= (B_1, C_1, B_2) \bowtie \\ &= C_1 + \frac{\|B_1 - C_1\| - \|C_1 - B_2\|}{\|B_1 - B_2\|} \cdot (B_1 - B_2) \end{aligned}$$

Es soll gezeigt werden:

$$\begin{aligned} C_2 &= (A_1, C_1, A_2) \bowtie \\ &= C_1 + \frac{\|A_1 - C_1\| - \|C_1 - A_2\|}{\|A_1 - A_2\|} \cdot (A_1 - A_2) \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} & C_2 - C_1 \\ = & \frac{\|B_1 - C_1\| - \|C_1 - B_2\|}{\|B_1 - B_2\|} \cdot (B_1 - B_2) \\ = & \frac{\|B_1 - C_1\| - \|C_1 - B_2\|}{\|B_1 - B_2\|} \cdot \frac{\|B_1 - A_2\| - \|A_1 - B_1\|}{\|A_1 - A_2\|} \cdot (A_1 - A_2) \end{aligned}$$

Damit mu noch gezeigt werden:

$$\begin{aligned} & \frac{\|A_1 - C_1\| - \|C_1 - A_2\|}{\|A_1 - A_2\|} \\ = & \frac{\|B_1 - C_1\| - \|C_1 - B_2\|}{\|B_1 - B_2\|} \cdot \frac{\|B_1 - A_2\| - \|A_1 - B_1\|}{\|A_1 - A_2\|} \end{aligned}$$

Das ist gleichbedeutend mit:

$$\begin{aligned} & \|A_1 - C_1\| - \|C_1 - A_2\| \\ = & \frac{\|B_1 - C_1\| - \|C_1 - B_2\|}{\|B_1 - B_2\|} \cdot (\|B_1 - A_2\| - \|A_1 - B_1\|) \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} & \|B_1 - B_2\| \\ = & \left\| \frac{\|A_1 - B_1\| - \|B_1 - A_2\|}{\|A_1 - A_2\|} \cdot (A_1 - A_2) \right\| \\ = & \frac{(\|A_1 - B_1\| - \|B_1 - A_2\|)^2}{\|A_1 - A_2\|} \end{aligned}$$

Damit mu gezeigt werden

$$
\begin{aligned}
& \|A_1 - C_1\| - \|C_1 - A_2\| \\
= \; & \frac{(\|B_1 - C_1\| - \|C_1 - B_2\|) \cdot \|A_1 - A_2\|}{(\|B_1 - A_2\| - \|A_1 - B_1\|)}
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
& \|C_1 - B_2\| \\
= \; & \left\| C_1 - B_1 - \frac{\|A_1 - B_1\| - \|B_1 - A_2\|}{\|A_1 - A_2\|} \cdot (A_1 - A_2) \right\| \\
= \; & \|C_1 - B_1\| + \frac{(\|A_1 - B_1\| - \|B_1 - A_2\|)^2}{\|A_1 - A_2\|} \\
- \; & \frac{\|A_1 - B_1\| - \|B_1 - A_2\|}{\|A_1 - A_2\|} \\
\cdot \; & (\|C_1 - B_1 + A_1 - A_2\| - \|C_1 - B_1\| - \|A_1 - A_2\|)
\end{aligned}
$$

Damit bleibt zu zeigen

$$
\begin{aligned}
& \|A_1 - C_1\| - \|C_1 - A_2\| \\
= \; & \frac{\|A_1 - B_1\| - \|B_1 - A_2\|}{\|B_1 - A_2\| - \|A_1 - B_1\|} \\
\cdot \; & (\|C_1 - B_1 + A_1 - A_2\| - \|C_1 - B_1\| - \|A_1 - A_2\|) \\
- \; & (\|A_1 - B_1\| - \|B_1 - A_2\|)^2) \\
= \; & \|C_1 - B_1\| + \|A_1 - A_2\| - \|C_1 - B_1 + A_1 - A_2\| \\
+ \; & \|A_1 - B_1\| - \|B_1 - A_2\|
\end{aligned}
$$

Nun gilt

$$
\begin{aligned}
& \|A_1 - B_1\| \\
= \; & \|A_1 - A_2 + A_2 - C_1 + C_1 - B_1\| \\
= \; & \|A_1 - C_1\| + \|A_1 - A_2 + C_1 - B_1\| + \|A_2 - B_1\| \\
- \; & \|A_1 - A_2\| - \|A_2 - C_1\| - \|C_1 - B_1\|
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
\|A_1 - C_1\| - \|A_2 - C_1\|
$$

$$\begin{aligned} = \;& \|A_1 - B_1\| - \|A_1 - A_2 + C_1 - B_1\| - \|A_2 - B_1\| \\ & + \|A_1 - A_2\| + \|C_1 - B_1\| \end{aligned}$$

Damit bleibt zu zeigen

$$\|A_2 - B_1\| = \|A_1 - B_2\|$$

Diese Gleichung gilt, da (A_1, B_1, A_2, B_2) ein Abstandsparallelogramm ist.
Damit ist die Behauptung bewiesen.
□

Def. 4.6 *Es seien zwei Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ gegeben. Dann heie die Abbildung*

$$s_{AB} := \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow \quad \mathcal{P} \\ X & \longmapsto \quad s_{AB}(X) := (A, X, B) \bowtie \end{cases}$$

die Trapezspiegelung an den Punkten A, B.

Bem. 4.6* *Es seien zwei Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben. Dann gilt*

I. $s_{AB}(A) = B$

II. $s_{AB}(X) = Y \succ s_{AB}(Y) = X$

III. *Gilt fr einen Punkt $X \in \mathcal{P}$ $A\overset{a}{X}{=}\overset{a}{X}B$, so gilt*

$$s_{AB}(X) = X$$

Beweis zu **??**:
Zu **??**:

$$\begin{aligned} s_{AB}(A) &= (A, A, B) \bowtie \\ &= A + \frac{\|A - A\| - \|A - B\|}{\|A - B\|} \cdot (A - B) \\ &= A - (A - B) \\ &= B \end{aligned}$$

Zu **??**:

$$s_{AB}(X) = Y \succ Y = (A, X, B) \bowtie$$
$$\succ Y = X + \frac{\|A - X\| - \|X - B\|}{\|A - B\|} \cdot (A - B)$$

Da (A, X, B, Y) ein Abstandsparallelogramm ist, gilt

$$\overset{a}{AX} = \overset{a}{BY}$$
$$\asymp \|A - X\| = \|B - Y\|$$

und entsprechend

$$\overset{a}{XB} = \overset{a}{YA}$$
$$\asymp \|X - B\| = \|Y - A\|$$

Damit gilt

$$Y = X + \frac{\|B - Y\| - \|Y - A\|}{\|A - B\|} \cdot (A - B)$$
$$\succ Y + \frac{\|A - Y\| - \|Y - B\|}{\|A - B\|} \cdot (A - B) = X$$
$$\succ (A, Y, B) \bowtie = X$$
$$\succ s_{AB}(Y) = X$$

Zu **??**: Gilt $\overset{a}{AX} = \overset{a}{XB}$, so gilt $\|A - X\| = \|X - B\|$ und damit:

$$s_{AB}(X)$$
$$= (A, X, B) \bowtie$$
$$= X + \frac{\|A - X\| - \|X - B\|}{\|A - B\|} \cdot (A - B)$$
$$= X$$

$\square$

Satz 4.7 *Jede Trapezspiegelung ist abstandstreu.*

Beweis zu **??**: Es seien Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ beliebig, aber fest vorgegeben. Um zu zeigen, da die Trapezspiegelung s_{AB} abstandstreu ist, mu fr beliebige Punkte $X, Y \in \mathcal{P}$

$$X\overset{a}{}Y{=}s_{AB}\left(X\right)\overset{a}{}s_{AB}\left(Y\right)$$

nachgewiesen werden.
Wir unterscheiden zwei Flle:
1.Es gelte $\|X-A\| = \|X-B\|$ und $\|Y-A\| = \|Y-B\|$.
Dann gilt

$$\begin{aligned}
s_{AB}\left(X\right) &= (A, X, B) \bowtie \\
&= X + \frac{\|A-X\| - \|X-B\|}{\|A-B\|} \cdot (A-B) \\
&= X
\end{aligned}$$

und entsprechend

$$s_{AB}\left(Y\right) = Y$$

Damit gilt die Behauptung.
2.Es gelte $\|X-A\| \neq \|X-B\|$ oder $\|Y-A\| \neq \|Y-B\|$.
o. B. d. A. sei im Folgenden $\|X-A\| \neq \|X-B\|$.
$(A, X, B, s_{AB}\left(X\right))$ und $(A, Y, B, s_{AB}\left(Y\right))$ sind Trapeze. Nach Satz **??** ist dann auch $(X, Y, s_{AB}\left(X\right), s_{AB}\left(Y\right))$ ein Trapez.
Da ein Trapez ein Abstandsparallelogramm ist, gilt damit die Behauptung.
□
Mit Hilfe von Satz **??** lt sich nun die Homogenittsregel fr $(\mathcal{P}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ nachweisen.

Satz 4.8 $(\mathcal{P}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ *ist eine relationale Gruppierung.*

Beweis zu **??**: Es mu nur noch fr beliebige Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ nachgewiesen werden:

$$\overset{a}{AB} \subset \overset{a}{AC} \circ \overset{a}{CB}$$

Fr $X, Y \in \mathcal{P}$ mit $X\ \overset{a}{AB}\ Y$ mu es also ein $Z \in \mathcal{P}$ geben, so da gilt:
$X\ \overset{a}{AC}\ Z$ und $Z\ \overset{a}{CB}\ Y$
Setze zunchst $X' = A$ und $Y' = (X', X, Y)\diamond$.
1.Fall: Es gelte $B \neq Y'$

Setze $Z' = s_{BY'}(C)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overset{a}{AC} &= \overset{a}{s_{BY'}(A)\, s_{BY'}(C)} \\
&= \overset{a}{s_{BY'}(A)\, Z'}
\end{aligned}$$

Da (X', X, Y, Y') ein Abstandsparallelogramm ist, gilt $\overset{a}{XY} = \overset{a}{X'Y'}$.
Wegen $X \; \overset{a}{AB} \; Y$ und $A = X'$ gilt damit

$$\overset{a}{AB} = \overset{a}{AY'}$$

Damit gilt nach **??** $s_{BY'}(A) = A = X'$. Wir wissen also:

$$\overset{a}{AC} = \overset{a}{X'Z'}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\overset{a}{CB} &= \overset{a}{s_{BY'}(C)\, s_{BY'}(B)} \\
&= \overset{a}{Z'Y'}
\end{aligned}$$

2:Fall:Es gelte $B = Y'$.
Setze $Z' = C$. Dann gilt ebenfalls $\overset{a}{AC} = \overset{a}{X'Z'}$ und $\overset{a}{CB} = \overset{a}{Z'Y'}$.
Setze nun $Z = (X, X', Z')\diamond$.
Dann ist (X, X', Z', Z) und damit auch (X', X, Z, Z') ein Parallelogramm.
Nach dem kleinen Satz von Desargues ist dann auch (Y', Y, Z, Z') ein Parallelogramm.
Da Parallelogramme Abstandsparallelogramme sind, gilt damit:
$\overset{a}{X'Z'} = \overset{a}{XZ}$ und $\overset{a}{Z'Y'} = \overset{a}{ZY}$
Damit ist ein $Z \in \mathcal{P}$ gefunden mit

$$\overset{a}{AC} = \overset{a}{XZ}$$

und

$$\overset{a}{CB} = \overset{a}{ZY}$$

$\square$

4_ III Abstandsparallelogramme

Im folgenden wird untersucht, welche Abstandsparallelogramme auf euklidischen Geometrien existieren knnen.

Satz 4.9 *Es seien $A, B, C \in \mathcal{P}$ paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Ferner sei char$\mathcal{K} \neq 2$.*

Dann gilt $(A, B, C)\diamond \neq (A, B, C) \bowtie$.

Beweis zu **??**:
Angenommen, es gelte

$(A, B, C)\diamond = (A, B, C) \bowtie$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& A - B + C = B + \frac{\|A-B\| - \|B-C\|}{\|A-C\|} \cdot (A - C) \\
\asymp \quad & A + C - \frac{\|A-B\| - \|B-C\|}{\|A-C\|} \cdot (A - C) = 2 \cdot B
\end{aligned}
$$

Da $char K \neq 2$ gilt ist $2 \neq 0$.Damit gilt

$$B = A + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\|A-B\| - \|B-C\|}{\|A-C\|}\right) \cdot (C - A)$$

B liegt damit auf der Geraden durch A und C.
□

Satz 4.10 *Ist char$\mathcal{K} = 2$, so gilt fr paarweise verschiedene Punkte A, B, C $(A, B, C)\diamond = (A, B, C) \bowtie$ genau dann, wenn*

$$\|A-B\| - \|B-C\| = \|A-C\|$$

gilt.

Beweis zu **??**: Angenommen, es gilt

$(A, B, C)\diamond = (A, B, C) \bowtie$

Dann gilt

$$
\begin{array}{ll}
& A - B + C = B + \dfrac{\|A-B\| - \|B-C\|}{\|A-C\|} \cdot (A-C) \\
\asymp & A + C - \dfrac{\|A-B\| - \|B-C\|}{\|A-C\|} \cdot (A-C) = 2 \cdot B \\
\asymp & \left(1 + \dfrac{\|A-B\| - \|B-C\|}{\|A-C\|}\right) \cdot (A-C) = 0 \\
\asymp & \|A-B\| - \|B-C\| = \|A-C\|
\end{array}
$$

□

Satz 4.11 *Liegen die Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ auf einer Geraden und gilt $A \neq C$, so gilt*

$$(A, B, C)\diamond = (A, B, C) \bowtie$$

Beweis zu **??**: Es gibt ein $k \in K$ mit $B = A + k \cdot (A - C)$. Damit gilt

$$
\begin{array}{ll}
& (A, B, C)\diamond \\
= & A - B + C \\
= & A - A - k \cdot (A - C) + C \\
= & C - k \cdot (A - C) \\
= & A - (A - C) - k \cdot (A - C) \\
= & A + k \cdot (A - C) - (2k + 1) \cdot (A - C) \\
= & A + k \cdot (A - C) + (k^2 - (1 + k)^2) \cdot (A - C) \\
= & A + k \cdot (A - C) + \dfrac{k^2 \cdot \|A-C\| - (1+k)^2 \cdot \|A-C\|}{\|A-C\|} \cdot (A-C) \\
= & A + k \cdot (A - C) + \dfrac{\|k \cdot (A-C)\| - \|A - C + k \cdot (A-C)\|}{\|A-C\|} \cdot (A-C) \\
= & B + \dfrac{\|A-B\| - \|B-C\|}{\|A-C\|} \cdot (A-C) \\
= & (A, B, C) \bowtie
\end{array}
$$

□

Aus den Stzen **??**, **??** und **??** folgt:

Satz 4.12 *In einer euklidischen Geometrie sind folgende Aussagen quivalent:*

I. $(A, B, C)\diamond = (A, B, C)\bowtie$ *gilt genau dann, wenn die Punkte* $A, B, C \in \mathcal{P}$ *auf einer Geraden liegen.*

II. *Es gilt* $char\mathcal{K} \neq 2$ *oder es gilt* $char\mathcal{K} = 2$ *und*

$$\|A - B\| - \|B - C\| \neq \|A - C\|$$

falls A, B, C *nicht kollinear liegen.*

Satz 4.13 *Es seien drei Punkte* $A, B, C \in \mathcal{P}$ *vorgegeben, die nicht auf einer Geraden liegen.*

Liegt ein Punkt D *in einer Ebene mit* A, B, C *und ist* (A, B, C, D) *ein Abstandsparallelogramm,so gilt*

$$D = (A, B, C)\diamond$$

oder

$$D = (A, B, C)\bowtie$$

Beweis zu **??**: Es seien im folgenden $A, B, C \in \mathcal{P}$ paarweise verschiedene Punkte. C liege nicht auf der Geraden durch A und B.
Liegt ein Punkt D in einer Ebene mit A, B, C, so gilt fr geeignet gewhlte $k_1, k_2 \in K$:

$$D = B + k_1 \cdot (A - B) + k_2 \cdot (B - C)$$

Damit gilt

$$\begin{array}{rl} & \|D - C\| \\ = & \|k_1 \cdot (A - B) + (k_2 + 1) \cdot (B - C)\| \\ = & {k_1}^2 \cdot \|A - B\| + (k_2 + 1)^2 \cdot \|B - C\| \\ + & k_1 \cdot (k_2 + 1) \cdot (\|A - C\| - \|A - B\| - \|B - C\|) \end{array}$$

Entsprechend gilt:

$$
\begin{aligned}
& \|D-A\| \\
= \quad & \|(k_1-1)\cdot(A-B)+k_2\cdot(B-C)\| \\
= \quad & (k_1-1)^2\cdot\|A-B\|+{k_2}^2\cdot\|B-C\| \\
+ \quad & (k_1-1)\cdot k_2\cdot(\|A-C\|-\|A-B\|-\|B-C\|)
\end{aligned}
$$

Da (A,B,C,D) ein Abstandsparallelogramm ist, gilt

$\|A-B\|=\|C-D\|$

und

$\|A-D\|=\|B-C\|$

Damit gilt Gleichung 1:

$$
\begin{aligned}
& ({k_1}^2-k_1\cdot k_2-k_1-1)\cdot\|A-B\| \\
+ \quad & ({k_2}^2+2\cdot k_2+1-k_1\cdot k_2-k_1)\cdot\|B-C\| \\
+ \quad & (k_1\cdot k_2+k_1)\cdot\|A-C\| \\
= \quad & 0
\end{aligned}
$$

und Gleichung 2:

$$
\begin{aligned}
& ({k_1}^2-2\cdot k_1+1-k_1\cdot k_2+k_2)\cdot\|A-B\| \\
+ \quad & ({k_2}^2-k_1\cdot k_2+k_2-1)\cdot\|B-C\| \\
+ \quad & (k_1\cdot k_2-k_2)\cdot\|A-C\| \\
= \quad & 0
\end{aligned}
$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
& (k_1-k_2-2)\cdot\|A-B\| \\
+ \quad & (k_2-k_1+2)\cdot\|B-C\| \\
+ \quad & (k_1+k_2)\cdot\|A-C\| \\
= \quad & 0
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$(k_2 - k_1 + 2) \cdot (\|A - B\| - \|B - C\|) = (k_1 + k_2) \cdot \|A - C\|$$

Umformung der Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}
& k_2 \cdot (\|A - C\| - (\|A - B\| - \|B - C\|)) \\
= \; & 2 \cdot (\|A - B\| - \|B - C\|) \\
& -k_1 \cdot (\|A - B\| - \|B - C\| + \|A - C\|)
\end{aligned}$$

Angenommen, es gilt

$$\|A - C\| = \|A - B\| - \|B - C\|$$

Dann gilt

$$2 \cdot (\|A - B\| - \|B - C\|) = 2 \cdot k_1 \cdot (\|A - B\| - \|B - C\|)$$

Damit mu $\|A - B\| = \|B - C\|$ oder $k_1 = 1$ oder $char\mathcal{K} = 2$ gelten.
Angenommen, es sei $\|A - B\| = \|B - C\|$. Dann wre $\|A - C\| = 0$ und damit $A = C$. Damit lge C entgegen der Voraussetzung auf der Geraden durch A und B.
Angenommen,es gilt $k_1 = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& - (k_2 + 1) \cdot \|A - B\| \\
& + k_2(k_2 + 1) \cdot \|B - C\| \\
& + (k_2 + 1) \cdot \|A - C\| \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

Damit gilt $k_2 = -1$ oder

$$\begin{aligned}
k_2 &= \frac{\|A - B\| - \|A - C\|}{\|B - C\|} \\
&= \frac{\|B - C\|}{\|B - C\|} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
& D \\
= \; & B + (A - B) - (B - C) \\
= \; & A - B + C \\
= \; & (A, B, C)\diamond
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
& D \\
= \; & B + (A - B) + (B - C) \\
= \; & B + (A - C) \\
= \; & B + \frac{\|A - B\| - \|B - C\|}{\|A - C\|} \cdot (A - C) \\
= \; & (A, B, C) \bowtie
\end{aligned}$$

Damit ist im Fall $k_1 = 1$ der Satz gezeigt.
Angenommen, es gilt $char\mathcal{K} = 2$ und $k_1 \neq 1$. Dann gilt $2 = 0$ und $k = -k$ fr alle $k \in \mathcal{K}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
& ({k_1}^2 + 1) \cdot \|A - B\| \\
+ \; & ({k_2}^2 + 1) \cdot \|B - C\| \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

Es ist $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 = k^2 + 1$ fr alle $k \in K$.
Damit gilt

$$\frac{(k_2 + 1)^2}{(k_1 + 1)^2} = \frac{\|A - B\|}{\|B - C\|}$$

Es existiert also ein $k \in \mathcal{K}$, so da

$$k^2 = \frac{\|A - B\|}{\|B - C\|}$$

gilt, nmlich

$$k := \frac{k_2 + 1}{k_1 + 1}$$

Damit gilt aber:

$$
\begin{array}{cl}
 & k^2 \cdot \|B - C\| = \|A - B\| \\
\asymp & k^2 \cdot \|B - C\| + \|A - B\| = 0 \\
\asymp & k^2 \cdot \|B - C\| + \|A - B\| + k \cdot (\|A - C\| + \|A - B\| + \|B - C\|) = 0 \\
\asymp & \|k \cdot (B - C) + (A - B)\| = 0 \\
\asymp & k \cdot (B - C) + (A - B) = 0
\end{array}
$$

Die Punkte A, B und C lgen also entgegen der Voraussetzung auf einer Geraden. Damit kann $char\mathcal{K} = 2$ in diesem Fall nicht gelten.
Damit ist der Satz fr

$\|A - C\| = \|A - B\| - \|B - C\|$

gezeigt.
Es gelte nun

$\|A - C\| \neq \|A - B\| - \|B - C\|$

Dann gilt

$$
\begin{array}{cl}
 & k_2 \\
= & 2 \cdot \dfrac{\|A - B\| - \|B - C\|}{\|A - C\| - \|A - B\| + \|B - C\|} \\
- & k_1 \cdot \dfrac{\|A - B\| - \|B - C\| + \|A - C\|}{\|A - C\| - \|A - B\| + \|B - C\|} \\
= & (1 - k_1) \cdot 2 \cdot \dfrac{\|A - B\| - \|B - C\|}{\|A - C\| - \|A - B\| + \|B - C\|} - k_1
\end{array}
$$

Setze nun

$$l' := 2 \cdot \frac{\|A - B\| - \|B - C\|}{\|A - C\| - \|A - B\| + \|B - C\|}$$

Dann gilt

$k_2 = (1 - k_1) \cdot l' - k_1$

Setze weiter

$k := 1 - k_1$

und

$$l := l' + 1 = \frac{\|A - B\| - \|B - C\| + \|A - C\|}{\|A - C\| - \|A - B\| + \|B - C\|}$$

so gilt

$$k_1 = 1 - k$$

und

$$k_2 = k \cdot l' + k - 1 = k \cdot l - 1$$

Durch Umformen der Gleichung 1 ergibt sich:

$$\begin{array}{lll}
 & & ({k_1}^2 - k_1 \cdot k_2 - k_1 - 1) \cdot \|A - B\| \\
 & & +({k_2}^2 + 2 \cdot k_2 + 1 - k_1 \cdot k_2 - k_1) \cdot \|B - C\| \\
 & & +(k_1 \cdot k_2 + k_1) \cdot \|A - C\| \\
 & = & 0 \\
\asymp & & ((1 - k)^2 - 1) \cdot \|A - B\| \\
 & & +((l \cdot k - 1)^2 + 2(l \cdot k - 1) + 1) \cdot \|B - C\| \\
 & & +(1 - k) \cdot l \cdot k \cdot (\|A - C\| - \|A - B\| - \|B - C\|) \\
 & = & 0 \\
\asymp & & (k^2 - 2k) \cdot \|A - B\| \\
 & & +l^2 \cdot k^2 \cdot \|B - C\| \\
 & & +(l \cdot k - l \cdot k^2) \cdot (\|A - C\| - \|A - B\| - \|B - C\|) \\
 & = & 0 \\
\asymp & & (\|A - B\| + l^2 \cdot \|B - C\| \\
 & & +l \cdot (\|A - B\| + \|B - C\| - \|A - C\|)) \cdot k^2 \\
 & & +(-2\,\|A - B\| + l \cdot (\|A - C\| - \|A - B\| - \|B - C\|)) \cdot k \\
 & = & 0
\end{array}$$

Damit mu entweder $k = 0$ oder

$$\begin{array}{lll}
 & & (\|A - B\| + l^2 \cdot \|B - C\| \\
 & + & l \cdot (\|A - B\| + \|B - C\| - \|A - C\|)) \cdot k \\
 & - & 2\,\|A - B\| + l \cdot (\|A - C\| - \|A - B\| - \|B - C\|) \\
= & & 0
\end{array}$$

gelten.
Ist $k = 0$, so ergibt sich $k_1 = 1$ und $k_2 = -1$ und damit

$$D = B + (A - B) - (B - C) = A - B + C = (A, B, C)\diamond$$

Sei nun

$$\begin{array}{rl} & (\|A-B\| + l^2 \|B-C\| + l(\|A-B\| + \|B-C\| - \|A-C\|)) \cdot k \\ - & 2\|A-B\| + l \cdot (\|A-C\| - \|A-B\| - \|B-C\|) \\ = & 0 \end{array}$$

Angenommen, es gilt

$$\|A-B\| + l^2 \cdot \|B-C\| + l \cdot (\|A-B\| + \|B-C\| - \|A-C\|) = 0$$

Dann ist die Gleichung nur lsbar, falls auch

$$l \cdot (\|A-C\| - \|A-B\| - \|B-C\|) = 2 \cdot \|A-B\|$$

gilt.
Dann gilt

$$\begin{array}{rl} & \|A-B\| + l^2 \cdot \|B-C\| + l \cdot (\|A-B\| + \|B-C\| - \|A-C\|) \\ = & \|A-B\| + l^2 \cdot \|B-C\| - 2 \cdot \|A-B\| \\ = & l^2 \cdot \|B-C\| - \|A-B\| \\ = & 0 \end{array}$$

Damit ergibt sich

$$\|A-B\| = l^2 \cdot \|B-C\|$$

und

$$\begin{array}{rcl} l \cdot \|A-C\| & = & 2 \cdot \|A-B\| + l \cdot \|A-B\| + l \cdot \|B-C\| \\ & = & (2l^2 + l^3 + l) \cdot \|B-C\| \\ & = & l \cdot (l+1) \cdot \|B-C\| \end{array}$$

Wre $l = 0$, so mte $\|A-B\| = 0$ und damit $A = B$ entgegen der Voraussetzung gelten.

Damit gilt

$\|A - C\| = (l + 1) \cdot \|B - C\|$

Die Umformung der Gleichung 2 ergibt dann

$$
\begin{aligned}
& && ({k_1}^2 - 2 \cdot k_1 + 1 - k_1 \cdot k_2 + k_2) \cdot \|A - B\| \\
& && +({k_2}^2 - k_1 \cdot k_2 + k_2 - 1) \cdot \|B - C\| \\
& && +(k_1 \cdot k_2 - k_2) \cdot \|A - C\| \\
& = && 0 \\
\Leftrightarrow & && ((1-k)^2 - 2 \cdot (1-k) + 1 - (1-k) \cdot (lk-1) + (lk-1)) \cdot l^2 \\
& && +((lk-1)^2 - (1-k) \cdot (lk-1) + (lk-1) - 1) \\
& && +((1-k) \cdot (lk-1) - (lk-1)) \cdot (l+1)^2 \\
& = && 0 \\
\Leftrightarrow & && (-2k + k^2 + lk^2) \cdot l^2 \\
& && +(l^2k^2 - 2lk + lk^2 - k) \\
& && +(-lk^2 + k)) \cdot (l+1)^2 \\
& = && 0
\end{aligned}
$$

Damit gilt $k = 0$ oder

$$
\begin{aligned}
& && (-2 + k + lk) \cdot l^2 \\
& && +(l^2k - 2l + lk - 1) \\
& && +(-lk + 1)) \cdot (l+1)^2 \\
& = && 0 \\
\Leftrightarrow & && -2l^2 + 2kl^2 + l^3k - 2l + lk - 1 \\
& && +l^2 + 2l + 1 - l^3k - 2l^2k - lk \\
& = && 0 \\
\Leftrightarrow & && -2l^2 + 2kl^2 + l^2 - 2l^2k \\
& = && 0 \\
\Leftrightarrow & && -l^2 = 0
\end{aligned}
$$

Damit mu $k = 0$ oder $l = 0$ gelten. Aus $l = 0$ folgt aber

$\|A - B\| = l^2 \, \|B - C\| = 0$

und damit entgegen der Voraussetzung $A = B$.

Der Fall $k = 0$ wurde bereits abgehandelt.
Es kann nun von

$$\|A-B\| + l^2 \cdot \|B-C\| + l \cdot (\|A-B\| + \|B-C\| - \|A-C\|) \neq 0$$

ausgegangen werden.
Dann gilt:

$$k = \frac{2 \cdot \|A-B\| - l \cdot (\|A-C\| - \|A-B\| - \|B-C\|)}{\|A-B\| + l^2 \cdot \|B-C\| + l \cdot (\|A-B\| + \|B-C\| - \|A-C\|)}$$

Ersetzt man l wieder durch

$$\frac{\|A-B\| - \|B-C\| + \|A-C\|}{\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|}$$

so ergibt sich

$$k = \frac{m_1}{m_2}$$

mit

$$\begin{array}{rl} & m_1 \\ = & 2 \cdot \|A-B\| \, (\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|)^2 \\ - & (\|A-B\| - \|B-C\| + \|A-C\|) \\ \cdot & (\|A-C\| - \|A-B\| - \|B-C\|) \\ \cdot & (\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rl} m_2 & \\ = & \|A-B\| \cdot (\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|)^2 \\ + & (\|A-B\| - \|B-C\| + \|A-C\|)^2 \cdot \|B-C\| \\ + & (\|A-B\| - \|B-C\| + \|A-C\|) \\ \cdot & (\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|) \\ \cdot & (\|A-B\| + \|B-C\| - \|A-C\|) \end{array}$$

Es ist

$$
\begin{array}{rl}
& m_1 \\
= & (2 \cdot \|A-B\| \, \|A-C\| - \|A-B\|^2 + 2 \cdot \|A-B\| \cdot \|B-C\| \\
+ & 2 \cdot \|B-C\| \cdot \|A-C\| - \|B-C\|^2 - \|A-C\|^2) \\
\cdot & (\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|)
\end{array}
$$

und

$$
\begin{array}{rl}
& m_2 \\
= & \|A-B\| \cdot (\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|) \\
\cdot & (\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|) \\
+ & \|B-C\| \cdot (\|A-B\| - \|B-C\| + \|A-C\|) \\
\cdot & (\|A-B\| - \|B-C\| + \|A-C\|) \\
+ & (\|A-B\| + \|B-C\| - \|A-C\|) \cdot (\|A-B\| - \|B-C\| + \|A-C\|) \\
\cdot & (\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|) \\
= & 2 \cdot \|A-B\| \cdot \|A-C\| \cdot (\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|) \\
+ & 2 \cdot \|B-C\| \cdot \|A-C\| \cdot (\|A-B\| - \|B-C\| + \|A-C\|) \\
- & \|A-C\| \cdot (\|A-B\| - \|B-C\| + \|A-C\|) \\
\cdot & (\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|) \\
= & (2 \cdot \|A-B\| \cdot \|A-C\| \\
- & 2 \cdot \|A-B\|^2 + 2 \cdot \|A-B\| \cdot \|B-C\| \\
+ & 2 \cdot \|B-C\| \cdot \|A-B\| \\
- & 2 \cdot \|B-C\|^2 + 2 \cdot \|B-C\| \cdot \|A-C\| \\
- & (\|A-B\| - \|B-C\| + \|A-C\|) \cdot (\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|)) \\
\cdot & \|A-C\| \\
= & (2 \cdot \|A-B\| \cdot \|A-C\| - \|A-B\|^2 \\
+ & 2 \cdot \|B-C\| \cdot \|A-B\| - \|B-C\|^2 + 2 \cdot \|B-C\| \cdot \|A-C\| \\
- & - \|A-C\|^2) \\
\cdot & \|A-C\|
\end{array}
$$

Damit gilt

$$
k = \frac{\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|}{\|A-C\|}
$$

Damit gilt

$$k_1 = \frac{\|A-B\| - \|B-C\|}{\|A-C\|}$$

und

$$\begin{aligned}
& k_2 \\
= \quad & k \cdot l - 1 \\
= \quad & \frac{\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|}{\|A-C\|} \\
\cdot \quad & \frac{\|A-B\| - \|B-C\| + \|A-C\|}{\|A-C\| - \|A-B\| + \|B-C\|} - 1 \\
= \quad & \frac{\|A-B\| - \|B-C\| + \|A-C\|}{\|A-C\|} - 1 \\
= \quad & \frac{\|A-B\| - \|B-C\|}{\|A-C\|}
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
D &= B + \frac{\|A-B\| - \|B-C\|}{\|A-C\|} \cdot (A - B + B - C) \\
&= (A, B, C) \bowtie
\end{aligned}$$

□

Satz 4.14 *Es seien Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ mit $A \neq C$ beliebig gegeben. Liegt ein Punkt D in einer Ebene mit A, B, C und ist (A, B, C, D) ein Abstandsparallelogramm, so gilt*

$$D = (A, B, C)\diamond$$

oder

$$D = (A, B, C) \bowtie$$

Beweis zu **??**: Ist (A, B, C, D) ein Abstandsparallelogramm, so gilt

$\|A - B\| = \|C - D\|$

und

$\|A - D\| = \|B - C\|$

Ist $A = B$, so gilt damit

$$
\begin{array}{ll}
 & \|A - B\| = \|C - D\| \\
\asymp & \|O\| = \|C - D\| \\
\asymp & 0 = \|C - D\| \\
\asymp & O = C - D \\
\asymp & D = C
\end{array}
$$

Da $(A, A, C)\diamond = A - A + C = C$ gilt, ist der Satz im Fall $A = B$ gezeigt. Ist $B = C$ so gilt entsprechend $A = D$ und $(A, B, B)\diamond = A$. Damit ist der Satz auch im Fall $B = C$ gltig.
Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so gilt der Satz nach Satz **??**.
Es sei nun angenommen, A, B und C lgen auf einer Geraden. Angenommen,D lge nicht auf der Geraden durch A, B und C.
Dann liegen B C und D nicht auf einer Geraden. Damit mu aber

$A = (B, C, D)\diamond$

oder

$A = (B, C, D) \bowtie$

gelten.
Angenommen, es wre $A = (B, C, D)\diamond$. Dann wre $\overset{r}{AB} = \overset{r}{CD}$. Damit lge aber D auf der Geraden durch A, B und C.
Angenommen, es wre $A = (B, C, D) \bowtie$. Dann wre $\overset{r}{AC} = \overset{r}{BD}$. Wieder lge D auf der Geraden durch A, B und C.
Damit mu D auf der Geraden durch A,B und C liegen. Es mu also fr ein geeignetes $k \in \mathcal{K}$ gelten:

$D = B + k \cdot (A - C)$

Damit gilt

$$
\begin{array}{ll}
 & \|A - D\| \\
= & \|A - B - k \cdot (A - C)\| \\
= & \|A - B\| + k^2 \cdot \|A - C\| \\
 & -k \cdot (\|A - B + A - C\| - \|A - B\| - \|A - C\|) \\
= & \|B - C\|
\end{array}
$$

und

$$\begin{array}{rl} & \|C-D\| \\ = & \|C-B-k\cdot(A-C)\| \\ = & \|C-B\|+k^2\cdot\|A-C\|-k\cdot(\|A-B\|-\|C-B\|-\|A-C\|) \\ = & \|A-B\| \end{array}$$

Die Subtraktion beider Gleichungen ergibt:

$$\begin{array}{rrl} & & \|A-B\|-\|B-C\| \\ = & & \|B-C\|-\|A-B\| \\ & + & k\cdot(\|A-B+A-C\|-\|A-B\|-\|A-B\|+\|B-C\|) \end{array}$$

Es ist

$$\begin{array}{rl} & \|A-B+A-C\| \\ = & \|A-B-(C-A)\| \\ = & \|A-B\|+\|A-C\|-\|B-C\|+\|A-B\|+\|A-C\| \end{array}$$

Einsetzen oben ergibt:

$$(1+1)\cdot(\|A-B\|-\|B-C\|)=(1+1)\cdot k\cdot\|A-C\|$$

Fr $char\mathcal{K}\neq 2$ ergibt sich damit

$$k=\frac{\|A-B\|-\|B-C\|}{\|A-C\|}$$

und der Beweis ist gefhrt.
Angenommen, es gilt $char\mathcal{K}=2$. Sei

$$D=A+k\cdot(B+C)$$

Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \|A+D\| & = & k^2\cdot\|B+C\| \\ & = & \|B+C\| \end{array}$$

und damit $k^2=1$. Damit gilt $(k+1)^2=k^2+1=0$ und damit $k=1$.
Damit ist der Beweis in diesem Fall ebenfalls gefhrt.
□

4_ IV Schlieungsstze

Satz 4.15 *Es seien drei Punkte $A_1, B_1, C_1 \in \mathcal{P}$ kollinear gegeben mit $A_1 \neq B_1$ und $A_1 \neq C_1$. Ein weiterer Punkt $A_2 \in \mathcal{P}$ sei beliebig gegeben.*

Gilt dann $B_2 = (A_1, A_2, B_1) \bowtie$ und $C_2 = (B_2, B_1, C_1)\diamond$, so gilt auch

$$C_2 = (A_1, A_2, C_1) \bowtie$$

Beweis zu **??**: Es gilt

$$B_2 = A_2 + \frac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\|} \cdot (A_1 - B_1)$$

und

$$\begin{aligned} C_2 &= B_2 - B_1 + C_1 \\ &= A_2 + \frac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\|} \cdot (A_1 - B_1) - B_1 + C_1 \end{aligned}$$

Es gilt fr ein geeignetes $k \in \mathcal{K}$

$$B_1 = A_1 + k \cdot (A_1 - C_1)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & C_2 \\ = \quad & A_2 + \frac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - A_1 - k \cdot (A_1 - C_1)\|}{\|A_1 - A_1 - k \cdot (A_1 - C_1)\|} \cdot (A_1 - A_1 - k \cdot (A_1 - C_1)) \\ - \quad & (1 + k) \cdot (A_1 - C_1) \\ = \quad & A_2 \\ - \quad & \frac{k^2 \cdot \|A_1 - C_1\| + k \cdot (\|A_1 - A_2\| + \|A_1 - C_1\| - \|A_2 - C_1\|)}{k^2 \cdot \|A_1 - C_1\|} \\ \cdot \quad & k \cdot (C_1 - A_1) \\ - \quad & (1 + k) \cdot (A_1 - C_1) \\ = \quad & A_2 \\ + \quad & \frac{\|A_1 - A_2\| + (1 + k) \cdot \|A_1 - C_1\| - \|A_2 - C_1\|}{\|A_1 - C_1\|} \cdot (A_1 - C_1) \\ - \quad & (1 + k) \cdot (A_1 - C_1) \\ = \quad & A_2 + \frac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - C_1\|}{\|A_1 - C_1\|} \cdot (A_1 - C_1) \\ = \quad & (A_1, A_2, C_1) \bowtie \end{aligned}$$

□

Satz 4.16 *Es seien Punkte $A_1, B_1, C_1, A_2 \in \mathcal{P}$ gegeben. Gilt dann $B_2 = (A_1, A_2, B_1) \bowtie$ und $C_2 = (B_2, B_1, C_1)\diamond$ und $C_2 = (A_1, A_2, C_1) \bowtie$, so liegen A_1, B_1 und C_1 kollinear.*

Beweis zu **??**: Wir knnen A_1, B_1 und C_1 als paarweise verschieden voraussetzen.
Andernfalls liegen die Punkte in jedem Fall kollinear.
Es gilt

$$B_2 = A_2 + \frac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\|} \cdot (A_1 - B_1)$$

$$C_2 = B_2 - B_1 + C_1$$

und

$$C_2 = A_2 + \frac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - C_1\|}{\|A_1 - C_1\|} \cdot (A_1 - C_1)$$

Setze

$$k_1 := \frac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - C_1\|}{\|A_1 - C_1\|}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} B_1 &= B_2 + C_1 - C_2 \\ &= C_1 + \frac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\|} \cdot (A_1 - B_1) - k_1 \cdot (A_1 - C_1) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\|}\right) \cdot B_1 \\ = \;& C_1 + \frac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\|} \cdot A_1 - k_1 \cdot (A_1 - C_1) \\ \asymp \;& (\|A_1 - B_1\| + \|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|) \cdot B_1 \\ = \;& \|A_1 - B_1\| \cdot C_1 + (\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|) \cdot A_1 \\ & +k_1 \cdot \|A_1 - B_1\| \cdot (A_1 - C_1) \\ = \;& (\|A_1 - B_1\| + \|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|) \cdot A_1 \\ & - \|A_1 - B_1\| \cdot (A_1 - C_1) + k_1 \cdot \|A_1 - B_1\| \cdot (A_1 - C_1) \end{aligned}$$

Damit mu gelten:

$$\|A_1 - B_1\| + \|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\| = 0$$

oder

$$B_1 = A_1 + \frac{(k_1 - 1) \cdot \|A_1 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\| + \|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|} \cdot (A_1 - C_1)$$

Gilt

$$\|A_1 - B_1\| + \|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\| \neq 0$$

so setze

$$k_2 := \frac{k_1 - 1}{\|A_1 - B_1\| + \|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|}$$

Dann gilt

$$B_1 = A_1 + k_2 \cdot (A_1 - C_1)$$

Damit sind A_1, B_1 und C_1 kollinear.
Angenommen, es glte

$$\|A_1 - B_1\| + \|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\| = 0$$

Dann mte $A_1 = B_1$ oder $A_1 = C_1$ oder $k_1 = 1$ gelten. Im Fall $A_1 = B_1$ oder $A_1 = C_1$ ist die Kollinearitt klar.
Gilt $k_1 = 1$, so mu $C_2 = A_2$ und damit

$$B_1 = C_1 + \frac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\|} \cdot (A_1 - B_1)$$

gelten. Damit ist die Kollinearitt ebenfalls bewiesen.
□

Satz 4.17 *Es seien Punkte $A_1, A_2, B_1 \in \mathcal{P}$ nicht kollinear gegeben. h sei eine zu g_{A_1,B_1} parallele Gerade und es gelte $B_2 = (A_1, A_2, B_1) \bowtie$.*

Weiter sollen die Schnittpunkte A_3 der Geraden h und g_{A_1,A_2} und B_3 der Geraden h und g_{B_1,B_2} existieren.

Dann gilt auch

$$B_3 = (A_1, A_3, B_1) \bowtie$$

Beweis zu **??**: Es sind

$A_3 = A_1 + k_A \cdot (A_2 - A_1)$

und

$B_3 = B_1 + k_B \cdot (B_2 - B_1)$

fr geeignete $k_A, k_B \in K$. Weiter gilt

$B_3 - A_3 = k_3 \cdot (B_1 - A_1)$

fr ein geeignetes $k_3 \in K$. Weiter gilt

$B_2 = A_2 + \dfrac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\|} \cdot (A_1 - B_1)$

Setzt man

$k_2 := \dfrac{\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\|}$

so gilt also auch

$B_2 - A_2 = k_2 \cdot (B_1 - A_1)$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
& B_3 - A_3 \\
= \; & B_1 - A_1 + k_B \cdot (B_2 - B_1) - k_A \cdot (A_2 - A_1) \\
= \; & B_1 - A_1 + k_B \cdot (B_2 - A_2) + k_B \cdot (A_2 - B_1) \\
& -k_A \cdot (A_2 - B_1) - k_A \cdot (B_1 - A_1) \\
= \; & k_3 \cdot (B_1 - A_1)
\end{aligned}$$

Damit gilt fr geeignetes $k_C \in K$

$(k_B - k_A) \cdot (A_2 - B_1) = k_C \cdot (B_1 - A_1)$

Da A_1, B_1, A_2 nicht kollinear liegen,mu $k_A = k_B$ und $k_C = 0$ gelten.
Dann gilt

$$\begin{aligned}
& B_3 - A_3 \\
= \; & B_1 - A_1 + k_A \cdot (B_2 - B_1 - A_2 + A_1) \\
= \; & (1 - k_A - k_2 \cdot k_A) \cdot (B_1 - A_1) \\
= \; & (k_2 \cdot k_A + k_A - 1) \cdot (A_1 - B_1)
\end{aligned}$$

Um

$(A_1, A_3, B_1) \bowtie= B_3$

nachzuweisen mu damit

$$\frac{\|A_1 - A_3\| - \|A_3 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\|} = k_2 \cdot k_A + k_A - 1$$

gezeigt werden. Es ist

$$\begin{aligned} \|A_1 - A_3\| &= \|A_1 - A_1 - k_A \cdot (A_2 - A_1)\| \\ &= k_A^2 \cdot \|A_2 - A_1\| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \|A_3 - B_1\| \\ = \; & \|A_1 - B_1 + k_A \cdot (A_2 - A_1)\| \\ = \; & \|A_1 - B_1\| + k_A^2 \cdot \|A_2 - A_1\| \\ & + k_A \cdot (\|A_2 - B_1\| - \|A_1 - B_1\| - \|A_2 - A_1\|) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\|A_1 - A_3\| - \|A_3 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\|} \\ = \; & \frac{k_A \cdot (\|A_1 - A_2\| - \|A_2 - B_1\| + \|B_1 - A_1\|) - \|A_1 - B_1\|}{\|A_1 - B_1\|} \\ = \; & k_A \cdot k_2 + k_A - 1 \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis gefhrt.
□

5 Definition des euklidischen Relativs

Def. 5.1 *Es seien eine Punktmenge $\mathcal{P}$ und zwei Relationenmengen $\overset{r}{\mathcal{R}}$ und $\overset{a}{\mathcal{R}}$ auf $\mathcal{P}$ so vorgegeben,da gilt:*

I. $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$ *ist ein affines Relativ,in dem der kleine Satz von Desargues gilt.*

Die Parallelogramme auf $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$ werden im folgenden als Richtungsparallelogramme bezeichnet.

$(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ bezeichne das zu $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$ gehrige Translationsrelativ.

Die Parallelogramme auf $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ werden im folgenden als (echte) Parallelogramme bezeichnet.

$(A, B, C)\diamond$ bezeichne den (eindeutig gegebenen) Parallelogrammschluss zu $A, B, C \in \mathcal{P}$.

II. $(\mathcal{P}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ *ist eine relationale Gruppierung.*

Die Parallelogramme auf $(\mathcal{P}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ werden im folgenden als Abstandsparallelogramme bezeichnet.

III. *Jedes Parallelogramm ist ein Abstandsparallelogramm.*

IV. *Liegen $A, B, C \in \mathcal{P}$ nicht auf einer Geraden, so gibt es in der von A, B, C aufgespannten Ebene e_{ABC} genau einen Punkt $D \in e_{ABC}$, so da (A, B, C, D) ein Abstandsparallelogramm, aber kein Parallelogramm ist.*

V. *Liegen $A, B, C \in \mathcal{P}$ auf einer Geraden und gilt $A \neq C$, so ist (A, B, C, D), wenn es Abstandsparallelogramm ist, bereits Parallelogramm.*

Wir definieren nun eine Abbildung $(A, B, C) \bowtie$ mit

$$(A, B, A) \bowtie := B$$

$$(A, B, C) \bowtie := (A, B, C)\diamond$$

falls $A \neq C$ gilt und A, B, C auf einer Geraden liegen und

$$(A, B, C) \bowtie := D$$

mit dem eindeutig bestimmetn D aus **??**, *falls A, B, C nicht auf einer Geraden liegen.*

Im folgenden heie $(A, B, C) \bowtie$ Trapezschluss zu den Punkten A, B, C und $(A, B, C, (A, B, C) \bowtie)$ ein Trapez.

VI. *Es seien $A_1, A_2, B_1 \in \mathcal{P}$ nicht kollinear gegeben. h sei eine zu g_{A_1,B_1} parallele Gerade. Gilt dann $B_2 = (A_1, A_2, B_1) \bowtie$ und $\{A_3\} = h \cap g_{A_1,A_2}$ sowie $\{B_3\} = h \cap g_{B_1,B_2}$ so gilt auch*

$$B_3 = (A_1, A_3, B_1) \bowtie$$

VII. *Es seien Punkte $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 \in \mathcal{P}$ mit $A_1 \overset{a}{B_1} \neq \overset{a}{B_1} A_2$ vorgegeben.*

Weiter seien (A_1, B_1, A_2, B_2) und (B_1, C_1, B_2, C_2) Trapeze.

Dann ist auch (A_1, C_1, A_2, C_2) ein Trapez.

VIII. *Es seien Punkte $A_1, B_1, C_1, A_2 \in \mathcal{P}$ mit $A_1 \neq B_1$ und $A_1 \neq C_1$ gegeben.*

Gilt dann $B_2 = (A_1, A_2, B_1) \bowtie$ und $C_2 = (B_2, B_1, C_1)\diamond$, so gilt genau dann

$$C_2 = (A_1, A_2, C_1) \bowtie$$

wenn A_1, B_1 und C_1 kollinear liegen.

Dann heie $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ ein euklidisches Relativ.

Satz 5.2 *Es sei (V, K) ein Vektorraum mit einer euklidischen Norm $\| \, \|$.*

Es sei entweder $char K \neq 2$ oder $char K = 2$ und $\|A - B\| + \|B - C\| = \|A - C\|$ gelte genau dann,wenn A, B und C auf einer Geraden liegen.

Dann ist $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ ein euklidisches Relativ, wenn man $\overset{r}{\mathcal{R}}$ und $\overset{a}{\mathcal{R}}$ entsprechend den Verfahren aus Definition **??** *setzt.*

Beweis zu **??**: **??** folgt aus Satz **??**.
?? folgt aus Satz **??**.
Zu **??**: Wegen Satz **??** gibt es hchstens ein geeignetes $D \in \mathcal{P}$.
Aus Satz **??** oder -im Fall $char K = 2$ - aus Satz **??** folgt die Existenz eines geeigneten $D \in \mathcal{P}$.

?? folgt aus Satz **??**.
Betrachtet man die Abbildung $\bowtie$ aus Definition **??**, so sieht man aus **??** und **??**, da sie mit der hier definierten Abbildung bereinstimmt.
Damit ergibt sich **??** aus Satz **??**.
?? ergibt sich aus Satz **??**.
?? ergibt sich aus Satz **??** und Satz **??**.
$\square$

Satz 5.3 *Es gilt fr $A, B, C \in \mathcal{P}$ stets*

$$\overset{r}{A}C{=}B(A, \overset{r}{B}, C) \bowtie$$

oder

$$(A, B, C) \bowtie = B$$

Beweis zu **??**: Fr $A = C$ gilt $(A, B, C) \bowtie = B$ nach Definition von $\bowtie$.
Liegen A, B und C auf einer Geraden und gilt $A \neq C$, so gilt $(A, B, C) \bowtie = (A, B, C)\diamond$ und damit $\overset{r}{A}C{=}B(A, \overset{r}{B}, C) \bowtie$ oder $(A, B, C) \bowtie = B$.
Angenommen A, B und C liegen nicht auf einer Geraden. Sei h die zu g_{AC} parallele Gerade durch D. Dann liegen h und $g_{C(A,B,C)\bowtie}$ in einer Ebene, aber nicht parallel.
Damit existiert der Schnittpunkt $D' := h \cap g_{C(A,B,C)\bowtie}$.
Es gilt $\overset{r}{B}D'{=}\overset{r}{A}C$ oder $D' = B$.
Nach **??** mu aber $D' = (A, B, C) \bowtie$ gelten.
$\square$

Satz 5.4 *Fr den Trapezschluss $\bowtie$ aus* **??** *gelten die folgenden Bedingungen:*

I. $(A, A, B) \bowtie = B$

II. $(A, B, C) \bowtie = (C, B, A) \bowtie$

III. *Fr* $(A, B, C) \bowtie \neq B$ *gilt* $(B, C, (A, B, C) \bowtie) \bowtie = A$

IV. $\overset{a}{A}B{=}\overset{a}{B}C \succ (A, B, C) \bowtie = B$

Beweis zu **??**:

Zu **??**:

Sei $X := (A, A, B) \bowtie$. Dann mu gelten: $\overset{a}{A}A=\overset{a}{B}X$. $\overset{a}{A}A$ ist aber die Gleichheitsrelation. Damit mu gelten: $X = B$.

Zu **??**: Fr $A = C$ ist die Gleichung offensichtlich.

Sei nun $A \neq C$. Sei $D = (A, B, C) \bowtie$. Dann ist (A, B, C, D) ein Abstandsparallelogramm, dessen Punkte in einer Ebene liegen.

Damit ist auch auch (C, B, A, D) ein Abstandsparallelogramm, dessen Punkte in einer Ebene liegen.

Liegen A, B, C nicht auf einer Geraden, so ist (C, B, A, D) kein Parallelogramm. Damit mu $D = (C, B, A) \bowtie$ gelten.

Liegen A, B, C auf einer Geraden und gilt $A \neq C$, so ist D der einzig mgliche Punkt, um (C, B, A) zu einem Abstandsparallelogramm zu ergnzen. Damit mu $D = (C, B, A) \bowtie$ gelten.

Zu **??**: Sei $D = (A, B, C) \bowtie$. Dann ist (A, B, C, D) ein Abstandsparallelogramm, dessen Punkte in einer Ebene liegen.

Dann ist auch (B, C, D, A) ein Abstandsparallelogramm, dessen Punkte in einer Ebene liegen.

Liegen B, C, D nicht auf einer Geraden, so ist (A, B, C, D) und damit auch (B, C, D, A) kein Parallelogramm. Damit mu (B, C, D, A) Trapez sein.

Liegen B, C, D auf einer Geraden und ist $B \neq D$, so gibt es nur einen mglichen Punkt, der (B, C, D) zu einem Abstandsparallelogramm ergnzt, nmlich A. Damit mu (B, C, D, A) Trapez sein.

Es gilt also fr $B \neq D$

$$(B, C, D) \bowtie = A$$

Zu **??**: Es sei $\overset{a}{A}B=\overset{a}{B}C$. Dann ist (A, B, C, B) ein Abstandsparallelogramm, dessen Punkte in einer Ebene liegen.

Liegt B nicht auf der Geraden durch A und C, so ist (A, B, C, B) kein Parallelogramm und mu damit ein Trapez sein.

Es seien A, B, C mit $A \neq C$ drei Punkte auf einer Geraden mit $\overset{a}{A}B=\overset{a}{B}C$. Dann ist (A, B, C, B) ein Abstandsparallelogramm. Nach **??** gibt es kein weiteres Abstandsparallelogramm, es mu also $(A, B, C) \bowtie = B$ gelten.

Fr $A = C$ gilt $(A, B, C) \bowtie = B$ nach Definition.

□

6 Abstandstreue Abbildungen auf euklidischen Relativen

Im folgenden soll untersucht werden, welche abstandstreuen Abbildungen auf einem euklidischen Relativ existieren knnen.

Dabei bezeichne $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ stets ein euklidisches Relativ.

6_ I Translationen

Die Translationen des affinen Relativs $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$ sind ihrer Definition nach richtungstreu.

Damit bilden Translationen Geraden auf Geraden und Ebenen auf Ebenen ab.

Nach **??** sind Translationen auerdem abstandstreu.

Satz 6.1 *Translationen bilden Parallelogramme auf Parallelogramme und Trapeze auf Trapeze ab.*

Beweis zu **??**: Es sei τ_{EF} eine beliebige Translation.
Betrachte ein Punktequadrupel (A, B, C, D).
Es sei zunchst $\overset{r}{A}B \neq \overset{r}{B}C$.
Ist (A, B, C, D) ein Parallelogramm, so ist, da Translationen richtungstreu sind,

$$(\tau_{EF}(A), \tau_{EF}(B), \tau_{EF}(C), \tau_{EF}(D))$$

ein Richtungsparallelogramm.
Es gilt $\tau_{EF}(A)\overset{r}{}\tau_{EF}(B) \neq \tau_{EF}(A)\overset{r}{}\tau_{EF}(B)$.
Damit ist

$$(\tau_{EF}(A), \tau_{EF}(B), \tau_{EF}(C), \tau_{EF}(D))$$

ein Parallelogramm.
Ist (A, B, C, D) ein Trapez, so ist, da Translationen abstandstreu sind,

$$(\tau_{EF}(A), \tau_{EF}(B), \tau_{EF}(C), \tau_{EF}(D))$$

ein Abstandsparallelogramm.
Da Translationen parallele Geraden in parallele Geraden berfhren und (A, B, C, D) kein Richtungsparallelogramm ist, ist

$$(\tau_{EF}(A), \tau_{EF}(B), \tau_{EF}(C), \tau_{EF}(D))$$

ebenfalls kein Richtungsparallelogramm.
Da die Punkte A, B, C, D in einer Ebene liegen, liegen auch die Punkte $\tau_{EF}(A), \tau_{EF}(B), \tau_{EF}(C), \tau_{EF}(D)$ in einer Ebene.
Damit mu

$$(\tau_{EF}(A), \tau_{EF}(B), \tau_{EF}(C), \tau_{EF}(D))$$

ein Trapez sein.
Es sei nun $\overset{r}{AB} = \overset{r}{BC}$ und $A \neq C$. Dann ist (A, B, C, D) genau dann ein Parallelogramm, wenn es ein Trapez ist.
Ist (A, B, C, D) ein Parallelogramm, so liegen A, B, C, D kollinear. Damit liegen aber auch $\tau_{EF}(A), \tau_{EF}(B), \tau_{EF}(C), \tau_{EF}(D)$ kollinear.

$$(\tau_{EF}(A), \tau_{EF}(B), \tau_{EF}(C), \tau_{EF}(D))$$

ist damit ebenfalls Parallogramm und Trapez.
□

6_ II Trapezspiegelungen

In Anlehnung an Definition **??** werden Trapezspiegelungen folgendermaen definiert:

Def. 6.2 *Es seien zwei Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ gegeben. Dann heie die Abbildung*

$$s_{AB} := \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ X & \longmapsto & s_{AB}(X) := (A, X, B) \bowtie \end{cases}$$

Trapezspiegelung an den Punkten A, B.

Zunchst wird sichergestellt, da fr die so definierten Trapezspiegelungen die gleichen Verhltnisse gelten wie in Bemerkung **??**.

Bem. 6.2* *Es seien Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben. Dann gilt*

I. $s_{AB}(A) = B$

II. $s_{AB}(X) = Y \succ s_{AB}(Y) = X$

III. *Gilt fr einen Punkt $X \in \mathcal{P}$ $\overset{a}{AX} = \overset{a}{XB}$, so gilt*

$$s_{AB}(X) = X$$

Beweis zu **??**: Zu **??**:

$$\begin{aligned} s_{AB}(A) &= (A, A, B) \bowtie \\ &= B \end{aligned}$$

Zu **??**: Fr $X = Y$ folgt die Behauptung sofort.
Es sei $X \neq Y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s_{AB}(X) = Y &\succ (A, X, B) \bowtie = Y \\ &\succ (X, B, Y) \bowtie = A \\ &\succ (B, Y, A) \bowtie = X \\ &\succ (A, Y, B) \bowtie = X \\ &\succ s_{AB}(Y) = X \end{aligned}$$

Zu **??**: Es ist $s_{AB}(X) = (A, X, B) \bowtie = X$ fr $AX \overset{a}{=} XB$ nach **??**
□

Satz 6.3 *Jede Trapezspiegelung ist abstandstreu.*

Beweis zu **??**: Es seien Punkte $X, Y \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben. Es mu gezeigt werden, da gilt:

$XY \overset{a}{=} s_{AB}(X) s_{AB}(Y)$

Sei $X' := s_{AB}(X)$ und $Y' := s_{AB}(Y)$.
Dann sind (A, X, B, X') und (A, Y, B, Y') Trapeze.
Damit ist nach **??** auch (B, X, A, X') ein Trapez.

Sei zunchst $AX' \overset{a}{\neq} AX$ angenommen. Dann ist auch (X, A, X', B) ein Trapez und nach **??** (X, Y, X', Y') ein Trapez.

Entsprechend ist fr $AY \overset{a}{\neq} AY'$ (Y, B, Y', A) und damit auch (Y, X, Y', X') ein Trapez.

Damit gilt in beiden Fllen $XY \overset{a}{=} X'Y'$.

Sei nun $AX \overset{a}{=} AX'$. Dann gilt $(X, A, X') \bowtie = A$. Angenommen, es sei $X \neq X'$, so gilt $(X, A, X') \bowtie = B$ und damit $A = B$ entgegen der Voraussetzung. Es mu also $X = X'$ gelten.

Entsprechend folgt aus $AY \overset{a}{=} AY'$ $Y = Y'$.

Ist also $AX \overset{a}{=} AX'$ und $AY \overset{a}{=} AY'$, so gilt ebenfalls $XY \overset{a}{=} X'Y'$.
□

Satz 6.4 *Es sei eine Trapezspiegelung s_{AB} gegeben. $C \neq D \in \mathcal{P}$ seien Punkte mit $s_{AB}(C) = D$. Dann gilt*

$$s_{AB} = s_{CD}$$

Beweis zu **??**: Es sei ein Punkt $X \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben. Setze

$Y := s_{AB}(X)$

Dann ist (A, X, B, Y) ein Trapez. Weiter ist auch (A, C, B, D) ein Trapez. Wegen $C \neq D$ ist auch (C, A, D, B) ein Trapez. Damit ist nach **??** auch (C, X, D, Y) ein Trapez. Also gilt:

$Y = s_{CD}(X)$

□

6_ III Geradenspiegelungen

Def. 6.5 *Es sei eine Gerade g beliebig vorgegeben. $A \neq B$ seien Punkte auf g. Dann heie die Abbildung*

$$s_{g_{AB}} := \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ X & \longmapsto & s_{g_{AB}}(X) \end{cases}$$

mit

$$s_{g_{AB}}(X) := (A, (A, X, B) \bowtie, B)\diamond$$

Geradenspiegelung an der Geraden g_{AB}.

Bevor die Wohldefiniertheit geprft wird, wird zunchst festgestellt:

Bem. 6.5* *Die Geradenspiegelung $s_{g_{AB}}$ lt die Punkte auf der Geraden g_{AB} fest.*

Beweis zu **??**: Liegt X auf der Geraden g_{AB}, so gilt

$(A, X, B) \bowtie = (A, X, B)\diamond$

und damit

$(A, (A, X, B)\diamond, B)\diamond = X$

□

Beweis zu **??**: Es mu gezeigt werden, da die Definition von der Wahl der Punkte A und B unabhngig ist.
Sei $B' \in g$ gegeben mit $B' \neq A$ und $B' \neq B$.
Es mu gezeigt werden:

$$s_{AB} = s_{AB'}$$

Es sei ein Punkt $X \notin g_{AB}$ beliebig gegeben. Es mu gezeigt werden:

$$(A, (A, X, B) \bowtie, B)\diamond = (A, (A, X, B') \bowtie, B')\diamond$$

Es bezeichne $Y_1 := (A, X, B) \bowtie$ und $Y_2 := (A, X, B') \bowtie$.
Da A, B und B' kollinear liegen, mu nach **??** auch

$$Y_2 = (Y_1, B, B')\diamond$$

gelten.
Es bezeichne $Z_1 := (A, Y_1, B)\diamond$. Dann gilt nach dem kleinen Satz von Desargues auch $Z_1 = (A, Y_2, B')\diamond$.
Damit gilt aber

$$(A, Y_1, B)\diamond = (A, Y_2, B')\diamond$$

□

Es soll nun der Zusammenhang zwischen Trapezspiegelungen und Geradenspiegelungen genauer untersucht werden.

Satz 6.6 *Es sei s_{AB} eine Trapezspiegelung, die zwei Punkte $C_1 \neq C_2 \in \mathcal{P}$ als Fixpunkte hat. Ferner sollen die Punkte A, B, C_1, C_2 und C_3 in einer Ebene liegen. Gilt dann $s_{AB}(C_3) = C_3$, so gilt $C_3 \in g_{C_1C_2}$.*

Beweis zu **??**: Es gilt fr $i = 1, 2, 3$ $(A, C_i, B) \bowtie = C_i$ und damit $AC_i \overset{a}{=} C_iB$.
Betrachte die Punkte D_{12}, D_{13} und D_{23} mit

$$D_{ij} := (C_i, B, C_j)\diamond$$

Es ist $D_{ij}C_i \overset{a}{=} BC_j \overset{a}{=} AC_j$ und $C_jD_{ij} \overset{a}{=} BC_i$.
Damit ist (C_j, A, C_i, D_{ij}) ein Abstandsparallelogramm.
Wre es ein Parallelogramm, so mte $A = (C_i, D_{ij}, C_j)\diamond = B$ gelten.
Damit gilt

$$D_{ij} = (C_i, A, C_j) \bowtie$$

da smtliche Punkte in einer Ebene liegen.
Da (C_1, B, C_2, D_{12}) und (C_1, B, C_3, D_{13}) Parallelogramme sind, ist nach dem kleinen Satz von Desargues auch

$$(C_2, D_{12}, D_{13}, C_3)$$

ein Parallelogramm.
Damit gilt

$$D_{12} = (C_1, A, C_2) \bowtie$$

$$D_{13} = (D_{12}, C_2, C_3) \diamond$$

und

$$D_{13} = (C_1, A, C_3) \bowtie$$

Damit mssen C_1, C_2 und C_3 nach **??** kollinear liegen.
$\square$

Satz 6.7 *Es sei eine Ebene $e \subset \mathcal{P}$ gegeben. $g \subset e$ sei eine Gerade auf e. Betrachtet man die auf e restringierte Geradenspiegelung s_g, so ist sie gleich einer geeigneten auf e restringierten Trapezspiegelung.*

Beweis zu **??**: Es sei eine Gerade g_{XY} auf einer Ebene e gegeben.
Whle einen Punkt $A_1 \in e$ mit $A_1 \notin g_{XY}$.
Setze nun

$$A_2 := (X, A_1, Y) \bowtie$$

$$A_3 := s_{g_{XY}}(A_1) = (X, A_2, Y) \diamond$$

Es wird gezeigt, da

$$s_{g_{XY}} = s_{A_1 A_3}$$

auf der Ebene e gilt. Whle dazu $B_1 \in e$ beliebig und setze

$$B_2 := (X, B_1, Y) \bowtie$$

$$B_3 := s_{A_1 A_3}(B_1) = (A_1, B_1, A_3) \bowtie$$

Es mu gezeigt werden, da dann auch

$$B_3 = s_{g_{XY}}(B_1) = (X, B_2, Y)\diamond$$

gilt.
Es gilt $\overset{a}{A_1}X{=}\overset{a}{A_2}Y{=}\overset{a}{A_3}X$. Damit gilt $(A_1, X, A_3) \bowtie = X$.
Damit ist X Fixpunkt der Trapezspiegelung $s_{A_1A_3}$.
Entsprechend ist wegen

$$\overset{a}{A_1}Y{=}\overset{a}{A_2}X{=}\overset{a}{A_3}Y$$

Y Fixpunkt der Trapezspiegelung $s_{A_1A_3}$.
Wir unterscheiden nun zwei Flle:
Fall 1: Es sei $B_1 = B_3$. Dann ist B_1 Fixpunkt der Trapezspiegelung $s_{A_1A_3}$.
Da auch X und Y Fixpunkte der Trapezspiegelung sind, gilt damit nach Satz **??** $B_1 \in g_{XY}$.
Nach Bemerkung **??** gilt dann aber $s_{g_{XY}}(B_1) = B_1$.
Fall 2: Es gelte $B_1 \neq B_3$. Dann mu $\overset{a}{A_1}B_1{\neq}\overset{a}{B_1}A_3$ gelten.
Dann ist mit (A_1, B_1, A_3, B_3) und (A_1, X, A_3, X) auch (B_1, X, B_3, X) ein Trapez und damit

$$\overset{a}{B_1}X{=}\overset{a}{B_3}X$$

Analog gilt auch

$$\overset{a}{B_1}Y{=}\overset{a}{B_3}Y$$

Damit gilt

$$\overset{a}{B_2}X{=}\overset{a}{B_1}Y{=}\overset{a}{B_3}Y$$

und

$$\overset{a}{B_2}Y{=}\overset{a}{B_1}X{=}\overset{a}{B_3}X$$

(X, B_2, Y, B_3) ist also ein Abstandsparallelogramm.
Es mu also

$$B_3 = (X, B_2, Y)\diamond$$

oder

$$B_3 = (X, B_2, Y) \bowtie$$

gelten, da alle Punkte in einer Ebene liegen.
Es ist $B_2 = s_{XY}(B_1)$ und damit auch $B_1 = s_{XY}(B_2)$.
Wrde $B_3 = (X, B_2, Y) \bowtie$ gelten, so wre damit entgegen der Fallvoraussetzung $B_1 = B_3$.
Damit mu $B_3 = (X, B_2, Y)\diamond$ gelten.
$\square$

Satz 6.8 *Es sei eine Ebene $e \subset \mathcal{P}$ gegeben. Ist s_{AB} eine auf e reduzierte Trapezspiegelung, so gibt es eine Gerade $g \subset e$, so da $s_{AB} = s_g$ gilt.*

Beweis zu **??**: Wir suchen zunchst einen Punkt $M \in e$ mit $\overset{a}{A}M=\overset{a}{B}M$. Es sei ein Punkt $C \in e$ so gegeben, da A, B, C nicht kollinear liegen. Betrachte

$$D := (A, C, B) \bowtie$$

Gilt $C = D$, so setze $M := C$.
Gilt $C \neq D$, so ist (A, B, C, D) ein Trapez und damit kein Parallelogramm.
Es mu also $\overset{r}{A}B\neq\overset{r}{C}D$ oder $\overset{r}{A}D\neq\overset{r}{B}C$ gelten.
Es sei o. B. d. A. $\overset{r}{A}B\neq\overset{r}{C}D$.
M sei der - eindeutig gegebene - Scnittpunkt von g_{AB} und g_{CD}.
Es sei h die zu g_{AC} parallele Gerade durch M. Nach **??** ist dann (A, M, B, M) ein Trapez und damit $\overset{a}{A}M=\overset{a}{B}M$.
Damit ist ein Punkt M gefunden mit $\overset{a}{A}M=\overset{a}{B}M$.
M liegt nicht kollinear zu A und B.
Setze nun

$$M' = (A, M, B)\diamond$$

Da A, M, B nicht kollinear liegen, gilt $M' \neq M$. Man sieht nun, da gilt:

$$\begin{aligned} s_{g_{MM'}}(A) &= (M, (M, A, M') \bowtie, M')\diamond \\ &= (M, A, M')\diamond \\ &= B \end{aligned}$$

Damit mu aber auf e bereits

$$s_{g_{MM'}} = s_{AB}$$

gelten.
$\square$

Bem. 6.8* *Jede Geradenspiegelung s_g hat genau die Punkte auf g als Fixpunkte.*

Beweis zu **??**: Nach **??** sind alle Punkte auf g Fixpunkte. Es sei e eine beliebige Ebene mit $g \subset e$. Da auf e jede Geradenspiegelung Trapezspiegelung ist, sind nach **??** alle Fixpunkte der Ebene e Elemente von g.
Da die Ebene beliebig gewhlt werden kann, sind alle Fixpunkte der Geradenspielung Elemente von g.
□

Satz 6.9 *Eine Trapezspiegelung s_{AB} bildet Geraden auf Geraden ab.*
Gilt dabei fr zwei Punkte $C_1, C_2 \in \mathcal{P}$ $s_{AB}(C_1) = C_1$ und $s_{AB}(C_2) = C_2$, so sind alle Punkte auf $g_{C_1C_2}$ Fixpunkte der Trapezspiegelung.

Beweis zu **??**: Es sei eine Gerade $g \subset \mathcal{P}$ gegeben. $C_1 \neq C_2 \in g$ seien Punkte auf g.
Setze

$$D_1 := s_{AB}(C_1)$$

und

$$D_2 := s_{AB}(C_2)$$

Es mu gezeigt werden, da fr ein beliebiges $C_3 \in g$ mit

$$D_3 := s_{AB}(C_3)$$

$D_3 \in g_{D_1D_2}$ gilt.
(C_1, C_2, D_1, D_2) ist ein Trapez.
Gilt $D_1 \notin g$, so liegen C_1, C_2 und D_1 nicht kollinear. Es sei h die Parallele zu $g_{C_1D_1}$ durch C_3. Dann gilt $C_3 \in g \cap h$.
Weiter existiert der Schnittpunkt E von h und $g_{D_1D_2}$, da beide Geraden in einer Ebene, aber nicht parallel liegen. Damit mu aber nach **??**

$$E = (A, C_3, B) \bowtie = D_3$$

gelten. Damit gilt $D_3 \in g_{D_1D_2}$.
Fr $D_2 \notin g$ verluft der Beweis analog.
Es sei jetzt $D_1, D_2 \in g$ vorausgesetzt. Gilt dann $C_1 \neq D_1$, so gilt $g \parallel g_{AB}$.
Weiter mu auch $C_3 = D_3$ oder $g_{C_3D_3} \parallel g_{AB}$ gelten.
Wegen $C_3 \in g$ folgt aus $g_{C_3D_3} \parallel g_{AB}$ $g = g_{C_3D_3}$.

Damit gilt in beiden Fllen $D_3 \in g$.
Fr $C_2 \neq D_2$ verluft der Beweis analog.
Es sei jetzt $C_1 = D_1$ und $C_2 = D_2$ vorausgesetzt. Wir mssen zeigen, da alle Punkte auf g Fixpunkte von s_{AB} sind.
Angenommen, es gbe einen Punkt $C_3 \in g$ mit

$$D_3 := s_{AB}(C_3)$$

und $D_3 \neq C_3$. Betrachte $s_{C_3D_3} = s_{AB}$. C_1 und C_2 mssen dann Fixpunkte von $s_{C_3D_3}$ sein. Weiter liegen C_1, C_2, C_3 und D_3 in einer Ebene. Damit mte $s_{C_3D_3} = s_{g_1}$ auf dieser Ebene fr eine geeignte Gerade g_1 gelten. C_1 und C_2 wren Fixpunkte von s_{g_1}. Damit wre $C_1, C_2 \in g_1$ und damit $g_1 = g$. Damit wre aber C_3 Fixpunkt von s_{AB} entgegen der Annahme.
$\square$

Satz 6.10 *Es sei s_{AB} eine Trapezspiegelung. F sei ein Fixpunkt von s_{AB}. δ sei eine Dilatation, die ebenfalls F als Fixpunkt hat.*
Dann gilt

$$\delta \circ s_{AB} = s_{AB} \circ \delta$$

Beweis zu **??**: Es ist

$$\delta \circ s_{AB}(F) = F = s_{AB} \circ \delta(F)$$

Es sei ein Punkt $C \in \mathcal{P}$ mit $C \neq F$ beliebig gegeben.
Es sei

$$C_1 := s_{AB}(C) = (A, C, B) \bowtie$$

und

$$C_2 := \delta(C)$$

Angenommen, es gilt $C_1 = C$. Dann sind alle Punkte auf g_{FC} Fixpunkte der Trapezspiegelung s_{AB}.
Weiter gilt $C_2 \in g_{FC}$.
Damit gilt $s_{AB}(C_2) = C_2$ und

$$\begin{aligned}
\delta \circ s_{AB}(C) &= \delta(C) \\
&= C_2 \\
&= s_{AB}(C_2) \\
&= s_{AB} \circ \delta(C)
\end{aligned}$$

Angenommen, es gilt $C_1 \neq C$.
Dann gilt $s_{AB} = s_{CC_1}$.
Da s_{CC_1} Geraden auf Geraden abbildet und $C_2 \in g_{FC}$ gelten mu, gilt fr

$$D := s_{CC_1}(C_2)$$

$D \in g_{FC_1}$. Weiter gilt $D \in \overset{g}{C_2CC_1}$. Betrachte

$$D' := \delta(C_1)$$

Es gilt $D' \in g_{FC_1}$. Weiter gilt $\overset{r}{CC_1} = \overset{r}{C_2D'}$ und damit $D' \in \overset{g}{C_2CC_1}$.
Damit mu aber $D = D'$ gelten.
$\square$

6_ IV Drehungen

Def. 6.11 *Es seien drei nicht kollineare Punkte $A, B, F \in \mathcal{P}$ mit $\overset{a}{AF} = \overset{a}{FB}$ gegeben. Dann heie die Abbildung*

$$d_{AFB} := \left\{ \begin{array}{ccc} e_{AFB} & \longrightarrow & e_{AFB} \\ X & \longmapsto & d_{AFB}(X) := s_{g_{FB}}(s_{AB}(X)) \end{array} \right.$$

Drehung von A nach B um F.

Da die Drehung damit Produkt zweier Spiegelungen ist, sieht man sofort:

Bem. 6.11* *Drehungen sind abstandstreu und bilden Geraden auf Geraden ab.*

Satz 6.12 *Es seien $A, F, B \in \mathcal{P}$ drei nichtkollineare Punkte mit $\overset{a}{AF} = \overset{a}{FB}$.*
Ist dann α eine abstandstreue Abbildung mit Fixpunkt F und $\alpha(A) = B$, die Punkte der durch A, B und F aufgespannten Ebene e_{AFB} wieder in diese Ebene abbildet, so gilt auf der Ebene e_{AFB}

$$\alpha = s_{AB} \vee \alpha = d_{AFB}$$

Um Satz **??** zu beweisen, beweisen wir zunchst zwei Hilfsstze:

Lemma 6.13 *Es sei eine Ebene e gegeben. Weiter seien Punkte* $A \neq B \in e$ *und* $C, D \in e$ *so gegeben, da* $\overset{a}{AC} = \overset{a}{AD}$ *und* $\overset{a}{BC} = \overset{a}{BD}$ *gilt.*
Dann mu

$$D = s_{g_{AB}}(C) \lor C = D$$

gelten.

Beweis zu **??**: Setze

$E := (A, D, B)\diamond$

Dann gilt $\overset{a}{AC} = \overset{a}{AD} = \overset{a}{BE}$ und $\overset{a}{BC} = \overset{a}{BD} = \overset{a}{AE}$.
Damit ist (A, C, B, E) ein Abstandsparallelogramm.
Angenommen,es gilt $C \neq D$.
Da (A, D, B, E) ein Parallelogramm ist und $C \neq D$ gilt, mu (A, C, B, E) ein Trapez sein.
Damit gilt aber

$$\begin{aligned} s_{g_{AB}}(C) &= (A, (A, C, B) \bowtie, B)\diamond \\ &= (A, E, B)\diamond \\ &= D \end{aligned}$$

□

Lemma 6.14 *Es seien* $A, F, B \in \mathcal{P}$ *drei nichtkollineare Punkte mit* $\overset{a}{AF} = \overset{a}{FB}$. *Ist dann* α *eine abstandstreue Abbildung mit Fixpunkt F und* $\alpha(A) = B$, *die Punkte der durch* A, B *und F aufgespannten Ebene* e_{AFB} *wieder in diese Ebene abbildet, so gilt fr jedes* $C \in e_{AFB}$

$$\alpha(C) = s_{AB}(C) \lor \alpha(C) = d_{AFB}(C)$$

Beweis zu **??**: Es sei ein Punkt C auf der Ebene e_{AFB} beliebig gegeben. Es sei $D = \alpha(C)$.
Da α abstandstreu ist, gilt $\overset{a}{AC} = \overset{a}{BD}$.
Weiter gilt $\overset{a}{AF} = \overset{a}{BF}$ und $\overset{a}{CF} = \overset{a}{DF}$.
Setze nun

$D_1 := s_{AB}(C)$

und

$D_2 := d_{AFB}(C)$

Dann gilt

$$\begin{aligned} D_2 &= s_{g_{FB}}(s_{AB}(C)) \\ &= s_{g_{FB}}(D_1) \end{aligned}$$

Es mu dann $D_1F \overset{a}{=} CF \overset{a}{=} DF$ und $D_1B \overset{a}{=} AC \overset{a}{=} DB$ gelten.
Damit gilt nach Lemma **??** $D = D_1$ oder $D = s_{g_{BF}}(D_1) = D_2$.
$\square$
Beweis zu **??**: Whle einen Punkt $C \notin g_{AF}$ auf der von A, B und F aufgespannten Ebene e_{AFB}.
Setze

$D := \alpha(C)$

Dann mu nach **??** $D = s_{AB}(C)$ oder $D = d_{AFB}(C)$ gelten.
Angenommen, es gilt $D = s_{AB}(C)$.
Es sei $X \in e_{AFB}$ beliebig gewhlt.
Dann mu $\alpha(X) = s_{AB}(X)$ oder $\alpha(X) = d_{AFB}(X)$ gelten.
Weiterhin mu nach Lemma **??** auch

$\alpha(X) = s_{CD}(X) \vee \alpha(X) = d_{CFD}(X)$

gelten.
Angenommen, es gilt $\alpha(X) \neq s_{AB}(X)$.
Dann mu $\alpha(X) = d_{AFB}(X)$ und $\alpha(X) = d_{CFD}(X)$ gelten. Setze

$Y := s_{AB}(X)$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & d_{AFB}(X) = d_{CFD}(X) \\ \asymp\; & s_{g_{FB}}(s_{AB}(X)) = s_{g_{FD}}(s_{CD}(X)) \\ \asymp\; & s_{g_{FB}}(Y) = s_{g_{FD}}(Y) \end{aligned}$$

Damit mu $g_{FB} = g_{FD}$ oder $Y = F$ gelten.
Angenommen, es gilt $g_{FB} = g_{FD}$.

Da Spiegelungen Geraden auf Geraden abbilden, wre dann $C \in g_{AF}$ entgegen der Voraussetzung.
Angenommen, es gilt $Y = F$.
Dann gilt auch $d_{AFB}(X) = F$ und damit $\alpha(X) = s_{AB}(X)$.
Damit mu $\alpha(X) = s_{AB}(X)$ fr alle $X \in e_{AFB}$ gelten, falls $\alpha(C) = s_{AB}(C)$ fr ein $C \notin g_{AF}$ gilt.
Gilt also $\alpha \neq s_{AB}$, so mu

$$\alpha(X) = d_{AFB}(X)$$

fr alle $X \notin g_{AF}$ gelten.
Fr $X \in g_{AF}$ gilt aber

$$s_{AB}(X) = d_{AFB}(X)$$

und damit ebenfalls

$$\alpha(X) = d_{AFB}(X)$$

Damit gilt $\alpha = s_{AB}$ oder $\alpha = d_{AFB}$.
$\square$

Satz 6.15 *Es seien paarweise verschiedene Punkte $A, B, F \in \mathcal{P}$ gegeben. e sei eine Ebene, auf der A, B und F liegen. Dann ist $s_{g_{AF}} \circ s_{g_{BF}}$ auf e keine Spiegelung.*

Beweis zu **??**: Betrachte

$$\begin{aligned} C &:= s_{g_{AF}} \circ s_{g_{BF}}(B) \\ &= s_{g_{AF}}(s_{g_{BF}}(B)) \\ &= s_{g_{AF}}(B) \end{aligned}$$

Es gilt auf e

$$s_{g_{AF}} = s_{BC}$$

Wre $s_{g_{AF}} \circ s_{g_{BF}}$ eine Spiegelung, so mte sie ebenfalls die Spiegelung s_{BC} sein, es mte auf der Ebene e also gelten

$$s_{g_{AF}} \circ s_{g_{BF}} = s_{g_{AF}}$$

Damit mte auf e $s_{g_{BF}} = \iota$ gelten.

Das stimmt offensichtlich nicht.

□

Damit ist klargestellt, da Drehungen keine Spiegelungen sind. Weiterhin mu das Hintereinanderausfhren zweier Spiegelungen mit einem gleichen Fixpunkt stets eine Drehung ergeben.

Satz 6.16 *Es seien eine Drehung d_{AFB} und eine Spiegelung $s_{g_{CF}}$ auf einer Ebene e mit einem gemeinsamen Fixpunkt F beliebig gegeben.*

Dann gibt es eine Spiegelung s_{XY} mit Fixpunkt F, so da

$$d_{AFB} = s_{XY} \circ s_{g_{CF}}$$

gilt.

Beweis zu **??**: Es sei

$$E := s_{g_{CF}}(A)$$

Betrachte die Spiegelung s_{EB}.
Da Spiegelungen abstandstreu sind, gilt $\overset{a}{A}F=\overset{a}{E}F$.
Da auch Drehungen abstandstreu sind, gilt $\overset{a}{A}F=\overset{a}{B}F$.
Damit gilt aber $\overset{a}{E}F=\overset{a}{B}F$.
Damit ist F ein Fixpunkt der Spiegelung s_{EB}.
Weiter gilt

$$s_{EB}\left(s_{g_{CF}}(A)\right) = B$$

$s_{EB} \circ s_{g_{CF}}$ mu als Produkt zweier Spiegelungen eine Drehung sein. Damit mu

$$d_{AFB} = s_{EB} \circ s_{g_{CF}}$$

gelten.

□

Satz 6.17 *Es seien drei Graden g_{A_1F},g_{A_2F} und g_{A_3F} auf einer Ebene e mit einem gemeinsamen Schnittpunkt F gegeben. Dann ist das Spiegelungsprodukt*

$$s_{g_{A_1F}} \circ s_{g_{A_2F}} \circ s_{g_{A_3F}}$$

auf e wieder eine Spiegelung.

Beweis zu **??**: Angenommen

$s_{g_{A_1F}} \circ s_{g_{A_2F}} \circ s_{g_{A_3F}}$

wre eine Drehung d_{BFC}.
Dann gbe es nach **??** eine Spiegelung s_{DE} mit

$d_{BFC} = s_{DE} \circ s_{g_{A_3F}}$

Damit mte aber

$s_{DE} = s_{g_{A_1F}} \circ s_{g_{A_2F}}$

gelten.
Da das Produkt zweier Spiegelungen keine Spiegelung ist, ist das ein Widerspruch.
Die abstandstreue Abbildung

$s_{g_{A_1F}} \circ s_{g_{A_2F}} \circ s_{g_{A_3F}}$

mu also eine Spiegelung sein.
□

Satz 6.18 *Es seien eine Spiegelung s_{AB} und eine Translation τ_{CD} beliebig gegeben. Dann gilt*

$$\tau_{CD} \circ s_{AB} = s_{\tau_{CD}(A)\tau_{CD}(B)} \circ \tau_{CD}$$

Beweis zu **??**: Es sei $X \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben. Setze

$Y := s_{AB}(X)$

Dann ist (A, X, B, Y) ein Trapez.
Damit ist

$(\tau_{CD}(A), \tau_{CD}(X), \tau_{CD}(B), \tau_{CD}(Y))$

ebenfalls ein Trapez.
Damit gilt

$\tau_{CD}(Y) = s_{\tau_{CD}(A)\tau_{CD}(B)}(\tau_{CD}(X))$

und also

$\tau_{CD} \circ s_{AB}(X) = s_{\tau_{CD}(A)\tau_{CD}(B)} \circ \tau_{CD}(X)$

□

Satz 6.19 *Es seien drei nichtkollineare Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ gegeben. Dann gibt es in der von A, B, C aufgespannten Ebene e_{ABC} genau einen Punkt M mit*

$$\overset{a}{AM}=\overset{a}{BM}=\overset{a}{CM}$$

Beweis zu **??**: Betrachte die Spiegelungen s_{AB} und s_{BC}.
Es gibt Geraden $g, h \subset e_{ABC}$, so da auf e_{ABC} $s_{AB} = s_g$ und $s_{BC} = s_h$ gilt.
Sind g und h nicht parallel, so haben sie, da sie auf einer Ebene liegen, einen Schnittpunkt. Fr diesen Schnittpunkt M gilt aber $\overset{a}{AM}=\overset{a}{BM}=\overset{a}{CM}$.
Gilt umgekehrt fr einen Punkt $M \in \mathcal{P}$ $\overset{a}{AM}=\overset{a}{BM}=\overset{a}{CM}$, so mu M in $g \cap h$ liegen.
Sind g und h nicht parallel, ist der Satz damit gezeigt.
Angenommen, es glte $g \parallel h$.
Whle einen Punkt $X \in g$ und einen Punkt $Y \in h$. Dann gilt

$$\tau_{XY}(g) = h$$

Es mu dann

$$s_{BC} = s_h = s_{\tau_{XY}(g)}$$

gelten.
Da die Translation τ_{XY} Parallelogramme in Parallelogramme und Trapeze in Trapeze abbildet, gilt aber

$$\tau_{XY}(B) = s_{\tau_{XY}(g)}(\tau_{XY}(A))$$

Damit gilt $\overset{r}{BC}=\overset{r}{\tau_{XY}(A)\tau_{XY}(B)}=\overset{r}{AB}$.
Damit lgen A, B, C entgegen der Vorausstzung kollinear.
□

7 Gerichtete Winkel

7_ I Winkelrelativ

Def. 7.1 *Es seien a,b,c,d Relationen auf* $\overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$ *mit* $a \circ b = c \circ d$.
Whle einen Fixpunkt $F \in \mathcal{P}$.
Gilt dann einer Ebene e mit $F\,(a \circ b) \subset e$

$$s_{\overset{g}{Fa}} \circ s_{\overset{g}{Fb}} = s_{\overset{g}{Fc}} \circ s_{\overset{g}{Fd}}$$

so heie (a,b) *und* (c,d) *der gleiche gleichgerichtete Winkel, in Zeichen*

$$(a,b) \equiv (c,d)$$

Die Relation $\widehat{ab}$ *mit*

$$c\,\widehat{ab}\,d :\leftrightarrow (a,b) \equiv (c,d)$$

heie Winkelrelation.
$\mathcal{W}$ *bezeichne die Menge der Winkelrelationen auf* $\overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$.

Beweis zu **??**: Es mu gezeigt werden, da die Definition unabhngig von der Wahl des Fixpunktes F ist.
Es sei zunchst $a \neq b$ vorausgesetzt.
Es seien zwei Punkte F_1 und F_2 gegeben. e_1 sei die von F_1 und a, b, e_2 die von F_2 und a, b festgelegte Ebene.
Es gelte fr alle Punkte $X \in e_1$:

$$s_{\overset{g}{F_1 a}}\left(s_{\overset{g}{F_1 b}}(X)\right) = s_{\overset{g}{F_1 c}}\left(s_{\overset{g}{F_1 d}}(X)\right)$$

Betrachte die Translation $\tau_{F_2F_1}$.
Es sei $Y \in e_2$ beliebig gewhlt. Setze

$$\tau_{F_2F_1}(Y) =: X$$

Dann gilt $X \in e_1$.

Nun ist nach Satz **??**

$$
\begin{aligned}
& s_{\overset{g}{F_2\,a}}\left(s_{\overset{g}{F_2\,b}}(Y)\right) \\
= \;& s_{\overset{g}{F_2\,a}}\left(s_{\overset{g}{F_2\,b}}(\tau_{F_1F_2}(X))\right) \\
= \;& s_{\overset{g}{F_2\,a}}\left(\tau_{F_1F_2}\left(s_{\overset{g}{F_1\,b}}(X)\right)\right) \\
= \;& \tau_{F_1F_2}\left(s_{\overset{g}{F_1\,a}}\left(s_{\overset{g}{F_1\,b}}(X)\right)\right) \\
= \;& \tau_{F_1F_2}\left(s_{\overset{g}{F_1\,c}}\left(s_{\overset{g}{F_1\,d}}(X)\right)\right) \\
= \;& s_{\overset{g}{F_2\,c}}\left(s_{\overset{g}{F_2\,d}}(Y)\right)
\end{aligned}
$$

Damit ist die Definition fr $a \neq b$ unabhngig von der Wahl des Fixpunktes F. Es sei nun $a = b$. Dann gilt fr beliebiges $F \in \mathcal{P}$ und fr beliebiges $X \in \mathcal{P}$ mit $X \neq F$

$$
\begin{aligned}
& s_{\overset{g}{F\,a}}\left(s_{\overset{g}{F\,a}}(X)\right) = s_{\overset{g}{F\,c}}\left(s_{\overset{g}{F\,d}}(X)\right) \\
\asymp \;& X = s_{\overset{g}{F\,c}}\left(s_{\overset{g}{F\,d}}(X)\right) \\
\asymp \;& s_{\overset{g}{F\,c}} = s_{\overset{g}{F\,d}} \\
\asymp \;& c = d
\end{aligned}
$$

□

Bem. 7.1* *Es gilt*

$$
\bigwedge_{c \subset a \circ b} \; \bigvee_{d \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}}^{1} c\,\widehat{ab}\,d
$$

Weiter gilt dann

$$
\widehat{ab} = \widehat{cd}
$$

Fr $c \not\subset a \circ b$ *gilt* $c\,\widehat{ab} = \emptyset$.

Beweis zu **??**: Fr $a = b$ gilt $c\,\widehat{ab}\,d$ genau dann, wenn $c = d$ gilt.
Sei nun $a \neq b$.
Es sei eine Relation $c \subset a \circ b$ gegeben. Whle einen Punkt $F \in \mathcal{P}$.
Gesucht ist eine Relation $d \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$, fr die in der von F und a, b aufgespannten Ebene gilt:

$$
\begin{array}{ll}
 & s_{\overset{g}{Fa}} \circ s_{\overset{g}{Fb}} = s_{\overset{g}{Fc}} \circ s_{\overset{g}{Fd}} \\
\asymp & s_{\overset{g}{Fc}} \circ s_{\overset{g}{Fa}} \circ s_{\overset{g}{Fb}} = s_{\overset{g}{Fd}}
\end{array}
$$

Da das Produkt dreier Spiegelungen mit Fixpunkt F eine Spiegelung mit Fixpunkt F ist, gibt es genau ein $d \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$, das die Bedingung erfllt.
$\widehat{ab} = \widehat{cd}$ ergibt sich sofort.
Gilt $c \not\subset a \circ b$, so gilt fr alle $d \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$ $c \circ d \neq a \circ b$. Damit gilt $c\,\widehat{ab} = \emptyset$.
$\square$

Satz 7.2 *Es gilt fr alle* $a, b, c \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$ *mit* $c \subset a \circ b$*:*

$$\widehat{ac} \circ \widehat{cb} = \widehat{ab}$$

Beweis zu **??**: Es sei ein Punkt $F \in \mathcal{P}$ beliebig gewhlt. Dann gilt

$$
\begin{array}{ll}
 & x\,(\widehat{ac} \circ \widehat{cb})\,y \\
\asymp & \bigvee\limits_{z \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}} x\widehat{ac}z \wedge z\widehat{cb}y \\
\asymp & \bigvee\limits_{z \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}} s_{\overset{g}{Fa}} \circ s_{\overset{g}{Fc}} = s_{\overset{g}{Fx}} \circ s_{\overset{g}{Fz}} \wedge s_{\overset{g}{Fc}} \circ s_{\overset{g}{Fb}} = s_{\overset{g}{Fz}} \circ s_{\overset{g}{Fy}} \\
\succ & s_{\overset{g}{Fa}} \circ s_{\overset{g}{Fc}} \circ s_{\overset{g}{Fc}} \circ s_{\overset{g}{Fb}} = s_{\overset{g}{Fx}} \circ s_{\overset{g}{Fz}} \circ s_{\overset{g}{Fz}} \circ s_{\overset{g}{Fy}} \\
\succ & s_{\overset{g}{Fa}} \circ s_{\overset{g}{Fb}} = s_{\overset{g}{Fx}} \circ s_{\overset{g}{Fy}} \\
\asymp & x\,\widehat{ab}\,y
\end{array}
$$

Damit gilt $\widehat{ac} \circ \widehat{cb} \subset \widehat{ab}$.
Gilt umgekehrt $s_{\overset{g}{Fa}} \circ s_{\overset{g}{Fb}} = s_{\overset{g}{Fx}} \circ s_{\overset{g}{Fy}}$, so kann man nach Satz **??** eine Spiegelung $s_{\overset{g}{Fz}}$ finden mit $s_{\overset{g}{Fz}} \circ s_{\overset{g}{Fy}} = s_{\overset{g}{Fc}} \circ s_{\overset{g}{Fb}}$. Dann gilt aber

$$
\begin{array}{ll}
 & s_{\overset{g}{Fx}} \circ s_{\overset{g}{Fz}} = s_{\overset{g}{Fa}} \circ s_{\overset{g}{Fc}} \\
\asymp & s_{\overset{g}{Fx}} \circ s_{\overset{g}{Fc}} \circ s_{\overset{g}{Fb}} \circ s_{\overset{g}{Fy}} = s_{\overset{g}{Fa}} \circ s_{\overset{g}{Fc}}
\end{array}
$$

$$\asymp \quad s^{g}_{Fx} \circ s^{g}_{Fc} \circ s^{g}_{Fb} \circ s^{g}_{Fy} = s^{g}_{Fa} \circ s^{g}_{Fb} \circ s^{g}_{Fb} \circ s^{g}_{Fc}$$
$$\asymp \quad s^{g}_{Fx} \circ s^{g}_{Fc} \circ s^{g}_{Fb} \circ s^{g}_{Fy} = s^{g}_{Fx} \circ s^{g}_{Fy} \circ s^{g}_{Fb} \circ s^{g}_{Fc}$$
$$\asymp \quad s^{g}_{Fc} \circ s^{g}_{Fb} \circ s^{g}_{Fy} = s^{g}_{Fy} \circ s^{g}_{Fb} \circ s^{g}_{Fc}$$
$$\asymp \quad s^{g}_{Fy} \circ s^{g}_{Fb} \circ s^{g}_{Fc} \circ s^{g}_{Fy} \circ s^{g}_{Fb} \circ s^{g}_{Fc} = \iota$$

Da das Produkt dreier Spiegelungen kommutativ ist und Spiegelungen selbstinvers sind, ist damit die Existenz eines geeigneten $z \in \mathcal{W}$ mit $x\,\widehat{ac}\,z$ und $z\,\widehat{cb}\,y$ nachgewiesen.
Damit gilt auch $\widehat{ab} \subset \widehat{ac} \circ \widehat{cb}$.
□

Satz 7.3 *Es seien Relationen $a, b, c, d \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$ gegeben mit $a \circ b = c \circ d$.*
Dann gilt

$$\widehat{ab} \circ \widehat{cd} = \widehat{cd} \circ \widehat{ab}$$

Beweis zu **??**: Es seien $a, b, c, d \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$ mit $a \circ b = c \circ d$ beliebig vorgegeben.
Dann gibt es genau ein $e \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$ mit $\widehat{cd} = \widehat{be}$.
Es gilt

$$\widehat{ab} \circ \widehat{cd} = \widehat{ab} \circ \widehat{be} = \widehat{ae}$$

Um

$$\widehat{ae} = \widehat{be} \circ \widehat{ab}$$

nachzuweisen, gengt es zu zeigen, da

$$a\,\widehat{be} \circ \widehat{ab}\,e$$

gilt.
Es sei ein Punkt $F \in \mathcal{P}$ beliebig gewhlt. Dann gilt

$$a\,\widehat{be} \circ \widehat{ab}\,e$$
$$\asymp \quad s^{g}_{Fb} \circ s^{g}_{Fe} \circ s^{g}_{Fa} \circ s^{g}_{Fb} = s^{g}_{Fa} \circ s^{g}_{Fe}$$
$$\asymp \quad s^{g}_{Fb} \circ s^{g}_{Fe} \circ s^{g}_{Fa} \circ s^{g}_{Fb} \circ s^{g}_{Fe} \circ s^{g}_{Fa} = \iota$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} & \widehat{ab} \circ \widehat{cd} \\ = \; & \widehat{ab} \circ \widehat{be} \\ = \; & \widehat{ae} \\ = \; & \widehat{be} \circ \widehat{ab} \\ = \; & \widehat{cd} \circ \widehat{ab} \end{aligned}$$

□

Satz 7.4 *Es gilt fr alle Relationen* $a, b, c, d \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$

$$\widehat{ab} = \widehat{cd} \asymp \widehat{ac} = \widehat{bd}$$

Beweis zu **??**: Es sei ein Punkt $F \in \mathcal{P}$ beliebig gewhlt. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \widehat{ab} = \widehat{cd} \\ \asymp \; & s_{g_{Fa}} \circ s_{g_{Fb}} = s_{g_{Fc}} \circ s_{g_{Fd}} \\ \asymp \; & s_{g_{Fb}} = s_{g_{Fa}} \circ s_{g_{Fc}} \circ s_{g_{Fd}} \\ \asymp \; & s_{g_{Fb}} \circ s_{g_{Fd}} = s_{g_{Fa}} \circ s_{g_{Fc}} \\ \asymp \; & \widehat{ac} = \widehat{bd} \end{aligned}$$

□

Satz 7.5 *Es seien zwei Relationen* $a, b \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$ *und eine Gerade* g_{CD} *mit* $\overset{r}{CD} \subset a \circ b$ *gegeben. Dann gilt*

$$\widehat{ab} = s_{g_{CD}}\widehat{(b)\, s_{g_{CD}}}(a)$$

Dazu wird zunchst folgender Hilfssatz bewiesen:

Satz 7.6 *Fr drei paarweise verschiedene Punkte* $A, B, C \in \mathcal{P}$ *gilt auf jeder Ebene* e *mit* $A, B, C \in e$

$$s_{g_{AC}} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AC}} = s_{g_{s_{g_{AC}}(B)C}}$$

Beweis zu **??**: Gilt $s_{g_{AC}}(B) = B$, so gilt $B \in g_{AC}$ und damit

$$\begin{aligned} & s_{g_{AC}} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AC}} \\ = \; & s_{g_{BC}} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{BC}} \\ = \; & s_{g_{BC}} \\ = \; & s_{g_{s_{g_{AC}}(B)C}} \end{aligned}$$

Sei nun $s_{g_{AC}}(B) \neq B$.
Da $s_{g_{AC}} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AC}}$ als Produkt dreier Spiegelungen eine Spiegelung ist, gengt es nachzuweisen, da

$s_{g_{AC}} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AC}}(s_{g_{AC}}(B)) = s_{g_{AC}}(B)$

gilt.
Es ist

$$\begin{aligned} & s_{g_{AC}} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AC}}(s_{g_{AC}}(B)) \\ = \; & s_{g_{AC}} \circ s_{g_{BC}}(B) \\ = \; & s_{g_{AC}}(B) \end{aligned}$$

□
Beweis zu **??**: Es seien Punkte A, B mit $a = AC$ und $b = BC$ gewhlt. Dann liegen die Punkte A, B, C, D in einer Ebene.
Es mu gezeigt werden:

$s_{g_{AC}} \circ s_{g_{BC}} = s_{g_{s_{g_{CD}}(B)C}} \circ s_{g_{s_{g_{CD}}(A)C}}$

Nun gilt nach Satz **??**

$$\begin{aligned} & s_{g_{s_{g_{CD}}(B)C}} \circ s_{g_{s_{g_{CD}}(A)C}} \\ = \; & s_{g_{CD}} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{CD}} \circ s_{g_{CD}} \circ s_{g_{AC}} \circ s_{g_{CD}} \\ = \; & s_{g_{CD}} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AC}} \circ s_{g_{CD}} \end{aligned}$$

Es mu also

$$\begin{aligned} & s_{g_{AC}} \circ s_{g_{BC}} = s_{g_{CD}} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AC}} \circ s_{g_{CD}} \\ \asymp \quad & s_{g_{AC}} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{CD}} = s_{g_{CD}} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AC}} \end{aligned}$$

nachgewiesen werden. Letzteres gilt, da die Produkte dreier Spiegelungen Spiegelungen sind und Spiegelungen selbstinvers sind.
□

7_ II Kreiswinkelsatz

Lemma 7.7 *Es seien drei nicht kollineare Punkte* $A, B, C \in \mathcal{P}$ *gegeben.* e_{ABC} *sei die von* A, B *und* C *aufgespannte Ebene und es sei ein Punkt* $M \in e_{ABC}$ *gegeben mit* $A\overset{a}{M}{=}B\overset{a}{M}{=}C\overset{a}{M}$.
Dann gilt auf auf der Ebene e_{ABC}:

$$d_{AMC} = \tau_{BM} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AB}} \circ \tau_{MB}$$

Beweis zu **??**: Es ist

$$\begin{aligned} & \tau_{BM} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AB}} \circ \tau_{MB}(M) \\ = & \tau_{BM} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AB}}(B) \\ = & \tau_{BM}(B) \\ = & M \end{aligned}$$

Damit ist M Fixpunkt der abstandstreuen Abbildung $\tau_{BM} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AB}} \circ \tau_{MB}$.
Es sei nun

$A' := \tau_{BM}(A)$

Dann gilt $A\overset{a}{A'}{=}B\overset{a}{M}{=}A\overset{a}{M}$ und damit $(A', A, M) \bowtie= A$.
Damit gilt aber

$s_{g_{A'M}}(A) = (A', A, M)\diamond = B$

Ensprechend gilt fr

$C' := \tau_{BM}(C)$

$s_{g_{C'M}}(C) = B$

Nun gilt nach Satz **??**

$$\begin{aligned} & \tau_{BM} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AB}} \circ \tau_{MB} \\ = & s_{g_{\tau_{BM}(B)\tau_{BM}(C)}} \circ s_{g_{\tau_{BM}(A)\tau_{BM}(B)}} \circ \tau_{BM} \circ \tau_{MB} \\ = & s_{g_{MC'}} \circ s_{g_{A'M}} \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
& s_{g_{MC'}} \circ s_{g_{A'M}}(A) \\
= \; & s_{g_{MC'}}(B) \\
= \; & C
\end{aligned}
$$

Damit ist

$\tau_{BM} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AB}} \circ \tau_{MB}$

eine abstandstreue Abbildung mit Fixpunkt M, die A nach C abbildet.
Als Produkt zweier Spiegelungen mu diese Abbildung eine Drehung sein.
□

Satz 7.8 *Es seien drei Punkte A, B, C nicht kollinear gegeben. e_{ABC} sei die von A, B und C aufgespannte Ebene.*

Ein Punkt $M \in e_{ABC}$ sei gegeben mit $\overset{a}{AM} = \overset{a}{BM} = \overset{a}{CM}$.

Dann gilt fr einen Punkt $D \in e_{ABC}$ mit $D \neq A, C$

$$\widehat{\overset{r}{AB}\overset{r}{BC}} = \widehat{\overset{r}{AD}\overset{r}{DC}}$$

genau dann,wenn

$$\overset{a}{BM} = \overset{a}{DM}$$

gilt.

Beweis zu **??**: Wir mssen zeigen,da

$s_{g_{M\overset{r}{BC}}} \circ s_{g_{M\overset{r}{AB}}} = s_{g_{M\overset{r}{DC}}} \circ s_{g_{M\overset{r}{AD}}}$

genau dann gilt,wenn $\overset{a}{BM} = \overset{a}{DM}$ gilt.
Es ist nach Satz **??**

$$
\begin{aligned}
& s_{g_{M\overset{r}{BC}}} \circ s_{g_{M\overset{r}{AB}}} \\
= \; & s_{g_{M\overset{r}{BC}}} \circ s_{g_{M\overset{r}{AB}}} \circ \tau_{BM} \circ \tau_{MB} \\
= \; & \tau_{BM} \circ s_{g_{BC}} \circ s_{g_{AB}} \circ \tau_{MB} \\
= \; & d_{AMC}
\end{aligned}
$$

Es seien A, C und D nicht kollinear.

Es sei $M' \in e_{ABC}$ der Punkt mit $\overset{a}{AM'}=\overset{a}{DM'}=\overset{a}{CM'}$. ($M'$ existiert eindeutig nach Satz **??**.) Dann gilt entsprechend

$$s_{g_{M'\overset{r}{D}C}} \circ s_{g_{M'\overset{r}{A}D}} = d_{AM'C}$$

Gilt nun $\overset{a}{BM}=\overset{a}{DM}$, und liegen A, C, D nicht kollinear, so gilt $M = M'$. Damit gilt

$$s_{g_{M\overset{r}{B}C}} \circ s_{g_{M\overset{r}{A}B}} = s_{g_{M\overset{r}{D}C}} \circ s_{g_{M\overset{r}{A}D}}$$

Angenommen, A, C und D lgen kollinear. Dann wre

$$\overset{a}{BM}=\overset{a}{DM}=\overset{a}{AM}=\overset{a}{CM}$$

Damit mte $D = A$ oder $D = B$ entgegen der Voraussetztung gelten.
Sei nun

$$\overset{r}{A}\overset{\frown}{B\overset{r}{B}}C = \overset{r}{A}\overset{\frown}{D\overset{r}{D}}C$$

vorausgesetzt. Dann knnen die Punkte A, C, D nicht kollinear liegen.
Es gilt

$$s_{g_{M\overset{r}{B}C}} \circ s_{g_{M\overset{r}{A}B}} = s_{g_{M\overset{r}{D}C}} \circ s_{g_{M\overset{r}{A}D}}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& d_{AMC} \\
& s_{g_{M\overset{r}{D}C}} \circ s_{g_{M\overset{r}{A}D}} \\
= \; & \tau_{M'M} \circ s_{g_{M'\overset{r}{D}C}} \circ s_{g_{M'\overset{r}{A}D}} \circ \tau_{MM'} \\
= \; & \tau_{M'M} \circ d_{AM'C} \circ \tau_{MM'}
\end{aligned}$$

Setze

$$A' := \tau_{MM'}(A)$$

$$C' := \tau_{MM'}(C)$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
C' &= \tau_{MM'}\,(C) \\
&= \tau_{MM'} \circ d_{AMC}\,(A) \\
&= \tau_{MM'} \circ \tau_{M'M} \circ d_{AM'C} \circ \tau_{MM'}\,(A) \\
&= d_{AM'C}\,(A')
\end{aligned}
$$

Angenommen, es gilt $M \neq M'$.
Wegen $A\overset{a}{M}=C\overset{a}{M}$ und $A\overset{a}{M'}=C\overset{a}{M'}$ ist $g_{MM'}$ Fixgerade von s_{AC}. Damit gilt

$C = s_{g_{MM'}}\,(A)$

Wre $A' \in g_{AM'}$, so mte $A \in g_{MM'}$ und damit $C = A$ entgegen der Voraussetzung gelten. Damit gilt

$A' \notin g_{AM'}$

Setze

$A_1 := (M, A, M') \bowtie$

so mu dann

$A_1 = (M, C, M')\Diamond$

gelten.
Setze nun

$A_2 := (M, M', A_1)\Diamond$

Es ist wegen $A_2\overset{a}{M}=A_1\overset{a}{M'}=A\overset{a}{M}$

$M = (A_2, M, A) \bowtie$

Weiter gilt

$M' = (M, A, A')\Diamond$

Wegen $M\overset{r}{M'}=A\overset{r}{A'}=A_1\overset{r}{A_2}=A\overset{r}{A_1}$ liegen $A_2, A, A' \in \mathcal{P}$ kollinear.
Gilt $A_2 \neq A$ und $A_2 \neq A'$, so gilt damit nach **??**:

$M' = (A_2, M, A') \bowtie$

und damit auch

$A_2 = (M, A', M') \bowtie$

Angenommen, es gilt $A_2 = A$. Dann gilt

$A_1 = (M', M, A)\diamond = A'$

und damit

$A' = (M, A_2, M') \bowtie$

und damit

$A_2 = (M, A', M') \bowtie$

Angenommen, es gilt $A_2 = A'$. Dann gilt

$A' := (M, M', A_1)\diamond$

Damit gilt aber $\overset{a}{A'M} = \overset{a}{A_1M'} = \overset{a}{AM} = \overset{a}{A'M'}$ und damit

$A_2 = A' = (M, A', M') \bowtie$

Nun sind (A_1, M', M, A_2) und (A_1, M', C, M) Parallelogramme. Damit ist auch (M, C, M, A_2) ein Parallelogramm. Weiter ist (M, C, C', M') ein Parallelogramm. Damit ist (M, A_2, M', C') ein Parallelogramm.
Damit gilt aber

$C' = s_{g_{MM'}}(A')$

und also

$C' = s_{AC}(A')$

Da nun $A' \notin g_{AM'}$ gelten mu, kann analog zum Beweis von **??** nicht

$C' = d_{AM'C}(A')$

gelten. Das ist ein Widerspruch.
Damit mu $M = M'$ gelten.
$\square$

Satz 7.9 *Es seien vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene e gegeben. A, B und C seien nicht kollinear. Dann gilt:*

$$\overset{r\,\frown\,r}{AB\,BC} = \overset{r\,\frown\,r}{AD\,DC} \succ \overset{r\,\frown\,r}{AC\,CB} = \overset{r\,\frown\,r}{AD\,DB}$$

Beweis zu **??**: Nach Satz **??** gibt es ein $M \in e$ mit $A\overset{a}{}M = B\overset{a}{}M = C\overset{a}{}M$.
Nach Satz **??** gilt dann auch $B\overset{a}{}M = D\overset{a}{}M$.
Damit gilt aber auch $C\overset{a}{}M = D\overset{a}{}M$ und damit wieder nach Satz **??**

$$A\overset{r}{}\overset{\frown}{C C}\overset{r}{}B = A\overset{r}{}\overset{\frown}{D D}\overset{r}{}B$$

□

8 Konstruktion euklidischer Geometrien

8_ I Winkelbewegungen

Def. 8.1 *Es sei eine Ebene e gegeben.Eine Bijektion*

$$\alpha := \begin{cases} e & \longrightarrow & e \\ X & \longmapsto & \alpha(X) \end{cases}$$

mit einem Fixpunkt F heie eine Winkelbewegung auf e, wenn gilt:

$$\bigwedge_{A,B,C,D \in e} C \ \overset{r}{AB} \ D \asymp \alpha(C) \ \alpha(A)\overset{r}{)}\alpha(B) \ \alpha(D)$$

Weiter mu gelten:

$$\bigwedge_{r,s \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}} \widehat{rs} = \alpha(\widehat{r)\alpha}(s)$$

Beweis zu **??**: Damit $\alpha(\widehat{r)\alpha}(s)$ bildbar ist, mu

$$\bigwedge_{r \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}} \alpha(r) \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$$

gelten.
Fr jede Winkelbewegung α gilt aber:

$$\bigwedge_{A,B \in \mathcal{P}} \alpha(\overset{r}{AB}) = \alpha(A)\overset{r}{)}\alpha(B) \in \overset{r}{\mathcal{R}}$$

Gilt $\overset{r}{AB} \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$, so gilt $A \neq B$. Da α injektiv ist, gilt auch $\alpha(A) \neq \alpha(B)$ und damit $\alpha(\overset{r}{AB}) \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$.
□
Aus der Definition ergibt sich sofort:

Bem. 8.1* *Es seien α und β zwei Winkelbewegungen auf einer Ebene e mit Fixpunkt F. Dann sind auch $\alpha \circ \beta$ und α^{-1} Winkelbewegungen mit Fixpunkt F.*

Bem. 8.1** *Es sei α eine Winkelbewegung mit zwei Fixpunkten $F_1 \neq F_2$. Dann mu α bereits die Identitt sein.*

Beweis zu **??**: Es sei ein Punkt $B \in e$ mit $B \notin g_{F_1F_2}$ gegeben. Dann mu fr $B' := \alpha(B)$ gelten:

$$\begin{aligned} \overset{r}{F_1}\overset{\frown}{F_2}\overset{r}{F_1}B &= \alpha(\overset{r}{F_1}\overset{\frown}{F_2})\alpha(\overset{r}{F_1}B) \\ &= \overset{r}{F_1}\overset{\frown}{F_2}\overset{r}{F_1}B' \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit des Winkels gilt damit $\overset{r}{F_1}B{=}\overset{r}{F_1}B'$. Entsprechend gilt $\overset{r}{F_2}B{=}\overset{r}{F_2}B'$. Damit gilt aber

$B' \in g_{F_1B} \cap g_{F_2B}$

und damit $B = B'$ wegen der Eindeutigkeit des Schnittpunktes.
Gilt $B \in g_{F_1F_2}$, so whle $F_3 \notin g_{F_1F_2}$. Nach der berlegung oben gilt $\alpha(F_3) = F_3$. Weiter gilt $B \notin g_{F_1F_3}$ und damit wieder $B = B'$.
□

Satz 8.2 *Zu drei Punkten F, A, B mit $F \neq A$ gibt es hchstens eine Winkelbewegung mit Fixpunkt F, die A nach B abbildet.*

Beweis zu **??**: Es seien α und β zwei Winkelbewegungen mit Fixpunkt F, die A nach B abbilden.
Dann ist nach **??** $\alpha^{-1} \circ \beta$ wieder eine Winkelbewegung.
Weiter gilt

$\alpha^{-1} \circ \beta(A) = \alpha^{-1}(B) = A$

Damit hat $\alpha^{-1} \circ \beta$ zwei Fixpunkte und ist nach **??** die Identitt. Damit mu aber $\alpha = \beta$ gelten.
□

Def. 8.3 *Es seien drei nicht kollineare Punkte $O, A, B \in \mathcal{P}$ gegeben. e_{OAB} sei die von O, A, B aufgespannte Ebene. Dann heie die Abbildung*

$$a_{OAB} := \begin{cases} e_{OAB} & \longrightarrow & e_{OAB} \\ X & \longmapsto & a_{OAB}(X) \end{cases}$$

mit

$$\{a_{OAB}(X)\} = O\,\overset{r}{O}X\;\overset{r}{O}\overset{\frown}{A}\overset{r}{O}B \cap X\,\overset{r}{O}X\;\overset{r}{O}\overset{\frown}{A}\overset{r}{A}B$$

fr $X \neq O$ *und*

$$a_{OAB}\,(X) := O$$

fr $X = O$ *Winkeldrehung von* A *nach* B *um* F.

Beweis zu **??**: Es mu sichergestellt werden, da die Menge

$$O\,\overset{r}{O}X\;\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}}B \cap X\,\overset{r}{O}X\;\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{A}}B$$

aus genau einem Punkt besteht.

Nach **??** gibt es genau eine Relation $a \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$ mit $\overset{r}{O}X\;\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}}B\,a$ und entsprechend genau eine Relation $b \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$ mit $\overset{r}{O}X\;\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{A}}B\,b$.
Angenommen, es glte $a = b$. Dann mte

$$\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}}B = \widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{A}}B$$

und damit $\overset{r}{O}B = \overset{r}{A}B$ gelten. Damit lgen die Punkte O, A, B entgegen der Voraussetzung kollinear.

Es gilt also $a \neq b$. Damit enthlt aber die Menge $\overset{g}{O}a \cap \overset{g}{X}b$ genau einen Punkt. Angenommen, dies wre der Punkt O.

Dann glte $b = OX$. Damit wre $\overset{r}{O}A = \overset{r}{A}B$ entgegen der Voraussetzung.

Angenommen, es wre der Punkt X, so wre $OX = a$ und damit $\overset{r}{O}A = \overset{r}{O}B$ entgegen der Voraussetzung.
Damit enthlt die Menge $Oa \cap Xb$ genau einen Punkt.
$\square$

Satz 8.4 *Es sei eine Ebene* e *gegeben. Ferner seien drei nicht kollineare Punkte* $O, A, B \in e$ *gegeben. Dann ist die Winkeldrehung* a_{OAB} *eine injektive Abbildung mit dem Fixpunkt* O, *die* A *nach* B *abbildet.*

Beweis zu **??**: Es seien zwei Punkte $C, D \in \mathcal{P}\backslash\{O\}$ gegeben mit $a_{OAB}\,(C) = a_{OAB}\,(D)$.
Es sei

$$\{E\} := \{a_{OAB}\,(C)\} = O\,\overset{r}{O}C\;\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}}B \cap C\,\overset{r}{O}C\;\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{A}}B$$

Dann gilt auch

$$\{E\} = O\,\overset{r}{O}D\;\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}}B \cap D\,\overset{r}{O}D\;\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{A}}B$$

Dann gilt $\widehat{\overset{r}{O}C\overset{r}{O}E} = \widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}B}$ und $\widehat{\overset{r}{O}D\overset{r}{O}E} = \widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}B}$.
Damit mu aber $\overset{r}{O}C{=}\overset{r}{O}D$ gelten.
Weiter gilt $\widehat{\overset{r}{O}C\overset{r}{C}E} = \widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{A}B}$ und $\widehat{\overset{r}{O}D\overset{r}{D}E} = \widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{A}B}$
Damit mu $\overset{r}{C}E{=}\overset{r}{D}E$ gelten.
Angenommen, es glte $\overset{r}{O}C{=}\overset{r}{C}E$. Dann glte auch $\overset{r}{O}C{=}\overset{r}{O}E$ und damit $\overset{r}{O}A{=}\overset{r}{O}B$ entgegen der Voraussetzung.
Gilt aber $\overset{r}{O}C{\neq}\overset{r}{C}E$, so ist damit

$$\begin{aligned} \{C\} &= O\ \overset{r}{O}C \cap E\ \overset{r}{C}E \\ &= O\ \overset{r}{O}D \cap E\ \overset{r}{D}E \\ &= \{D\} \end{aligned}$$

Damit mu die Abbildung injektiv sein.
Auerdem gilt

$$\begin{aligned} & O\ \overset{r}{O}A\ \widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}B} \cap A\ \overset{r}{O}A\ \widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{A}B} \\ = {} & O\ \overset{r}{O}B \cap A\ \overset{r}{A}B \\ = {} & \{B\} \end{aligned}$$

Damit bildet die Abbildung A auf B ab.
□

Satz 8.5 *Es sei eine Winkeldrehung a_{OAB} auf einer Ebene e gegeben. Dann gilt fr alle $r \in \overset{r}{\mathcal{R}}$ mit $O\,r \subset e$: Setzt man*

$$r' := r\,\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}B}$$

so gilt

$$X\,r\,Y \succ a_{OAB}\,(X)\ r'\,a_{OAB}\,(Y)$$

Beweis zu **??**: Es sei eine Relation $r \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$ mit $O\,r \subset e$ beliebig gegeben. Zwei Punkte $X, Y \in e$ seien gegeben mit $X\,r\,Y$. Es sei

$r' := r\,\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}B}$

$$s := r\,\widehat{\overset{r}{A}B\overset{r}{O}}A$$

$$\{U\} := \overset{g}{X}\,r \cap \overset{g}{O}\,s$$

Wegen $\overset{r}{O}A \neq \overset{r}{A}B$ gilt $r \neq s$, der Schnittpunkt U existiert also und ist eindeutig.
Weiter gelte:

$$U' := a_{OAB}\,(U)$$

$$X' := a_{OAB}\,(X)$$

$$Y' := a_{OAB}\,(Y)$$

Um $X'\,r'\,Y'$ nachzuweisen gengt nun der Nachweis einer der folgenden Flle:
Es gilt $X' = U'$ und $U'\,r'\,Y'$
Es gilt $Y' = U'$ und $X'\,r'\,U'$
Es gilt $X' \neq Y'$,$X'\,r'\,U'$ und $U'\,r'\,Y'$.
Da a_{OAB} injektiv ist, ist das bewiesen, wenn einer der folgenden Flle gilt:
Es gilt $X = U$ und $U'\,r'\,Y'$
Es gilt $Y = U$ und $X'\,r'\,U'$
Es gilt $X'\,r'\,U'$ und $U'\,r'\,Y'$.
Da

$$X\,r \cup \{X\} = Y\,r \cup \{Y\}$$

gilt, gengt es damit fr jedes beliebige $X \neq U$ zu zeigen:

$$X'\,r'\,U'$$

Angenommen, es gilt $U = O$. Dann gilt auch $U' = O$ und $r = OX$.
Es gilt wegen $X' = a_{OAB}\,(X)$

$$\widehat{\overset{r}{O}X\overset{r}{O}}X' = \widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}}B$$

Damit gilt aber bereits $O\,r'\,X'$ und damit $U'\,r'\,X'$.
Angenommen, es gilt $X = O$. Dann gilt auch $X' = O$ und $r = OU$.
Es gilt wegen $U' = a_{OAB}\,(U)$

$$\widehat{\overset{r}{O}U\overset{r}{O}}U' = \widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}}B$$

Damit gilt aber bereits $O\,r'\,U'$ und damit $X'\,r'\,U'$.
Es sei im folgenden $U \neq O$ und $X \neq O$ vorausgesetzt.
Dann gilt wegen $U' = a_{OAB}\,(U)$

$$\overset{r}{O}\wideparen{U\overset{r}{U}}U' = \overset{r}{O}\wideparen{A\overset{r}{A}}B$$

Weiter gilt $s = OU$.
Damit gilt

$$r\,\wideparen{\overset{r}{O}}U = \overset{r}{A}\wideparen{B\overset{r}{O}}A$$

Damit gilt $r = \overset{r}{U}U'$.
Es gilt wegen $X' = a_{OAB}\,(X)$

$$\overset{r}{O}\wideparen{X\overset{r}{O}}X' = \overset{r}{O}\wideparen{A\overset{r}{O}}B$$

$$\overset{r}{O}\wideparen{X\overset{r}{X}}X' = \overset{r}{O}\wideparen{A\overset{r}{A}}B$$

und damit auch

$$\overset{r}{O}\wideparen{X'\overset{r}{X}}X' = \overset{r}{O}\wideparen{B\overset{r}{A}}B$$

Entsprechend gilt wegen $U' = a_{OAB}\,(U)$

$$\overset{r}{O}\wideparen{U'\overset{r}{U}}U' = \overset{r}{O}\wideparen{A\overset{r}{O}}B$$

Damit gilt

$$\overset{r}{O}\wideparen{X'\overset{r}{X}}X' = \overset{r}{O}\wideparen{U'\overset{r}{U}}U'$$

Nun gilt aber $r = \overset{r}{X}U = \overset{r}{U}U'$ und damit auch $r = \overset{r}{X}U'$ oder $X = U'$.
Angenommen, es glte $X = U'$.Dann wre $\overset{r}{U}U' = \overset{r}{X}X'$. Wegen

$$\overset{r}{O}\wideparen{X\overset{r}{X}}X' = \overset{r}{O}\wideparen{U\overset{r}{U}}U'$$

glte dann auch $\overset{r}{O}X = \overset{r}{O}U = \overset{r}{X}U$.
Damit glte $\overset{r}{O}U = \overset{r}{U}U'$ und damit $\overset{r}{O}A = \overset{r}{A}B$ entgegen der Voraussetzung.
Fr $r = \overset{r}{X}U'$ gilt

$$\overset{r}{O}\wideparen{X'\overset{r}{X}}X' = \overset{r}{O}\wideparen{U'\overset{r}{X}}U'$$

Nach Satz **??** gilt dann auch

$$\overset{r}{O}\widehat{X\overset{r}{O}}X' = \overset{r}{X}\widehat{U'\overset{r}{U'}}X'$$

Damit gilt aber

$$\overset{r}{O}\widehat{A\overset{r}{O}}B = r\ \widehat{\overset{r}{U'}}X'$$

und damit $X'\,r'\,U'$.
$\square$

Satz 8.6 *Es seien O, A, B nicht kollineare Punkte auf einer Ebene e. Dann gibt es genau eine Winkelbewegung mit Fixpunkt O, die A in B berfhrt.*

Beweis zu **??**: Nach Satz **??** gibt es hchstens eine solche Winkelbewegung. a_{OAB} ist eine injektive Abbildung mit Fixpunkt O, die A in B berfhrt.
Es seien zwei Punkte $X \neq Y \in e$ gegeben. Dann gilt nach Satz **??** fr alle $X', Y' \in e$ mit $X'\ \overset{r}{X}Y\ Y'$

$$a_{OAB}\left(X'\right)\ \overset{r}{X}Y\ \overset{r}{O}\widehat{A\overset{r}{O}}B\, a_{OAB}\left(Y'\right)$$

Wegen $X\ \overset{r}{X}Y\ Y$ gilt dann:

$$\begin{aligned} & a_{OAB}\left(X'\right)\overset{r}{\,}a_{OAB}\left(Y'\right) \\ = \ & \overset{r}{X}Y\ \overset{r}{O}\widehat{A\overset{r}{O}}B \\ = \ & a_{OAB}\left(X\right)\overset{r}{\,}a_{OAB}\left(Y\right) \end{aligned}$$

Es seien nun zwei Relationen $\overset{r}{X}Y, \overset{r}{X'}Y' \in \overset{r}{\mathcal{R}}_{-o}$ mit $X, Y, X', Y' \in e$ beliebig gegeben.
Es mu gezeigt werden:

$$\widehat{\overset{r}{X}Y\overset{r}{X'}}Y' = a_{OAB}\left(\overset{r}{X}Y\right)\widehat{\,}a_{OAB}\left(\overset{r}{X'}Y'\right)$$

Nach Satz **??** gilt aber

$$\begin{aligned} & \overset{r}{X}Y a_{OAB}\widehat{\overset{r}{X}}a_{OAB}Y \\ = \ & \overset{r}{O}\widehat{A\overset{r}{O}}B \\ = \ & \overset{r}{X'}Y' a_{OAB}\widehat{\overset{r}{X'}}a_{OAB}Y' \end{aligned}$$

Damit gilt nach Satz **??**

$$\overset{r}{X}\widehat{Y\overset{r}{X'}}Y' = a_{OAB}\left(X\right)^{r} a_{OAB}\left(Y\right)\widehat{a_{OAB}}\left(X'\right)^{r} a_{OAB}\left(Y'\right)$$

Um zu zeigen, da a_{OAB} eine geeignete Winkelbewegung ist, mu damit nur noch die Surjektivitt nachgewiesen werden.
Es sei $X \in e$ beliebig gegeben. Fr $X = O$ gilt $a_{OAB}\left(O\right) = O$.
Fr $X \neq O$ setze

$$X' := a_{OBA}\left(X\right)$$

Dann gilt

$$\overset{r}{O}\widehat{X\overset{r}{O}}X' = \overset{r}{O}\widehat{B\overset{r}{O}}A$$

und

$$\overset{r}{O}\widehat{X\overset{r}{X}}X' = \overset{r}{O}\widehat{B\overset{r}{A}}B$$

Damit gilt auch

$$\overset{r}{O}\widehat{X'\overset{r}{O}}X = \overset{r}{O}\widehat{A\overset{r}{O}}B$$

und

$$\overset{r}{O}\widehat{X'\overset{r}{X}}X' = \overset{r}{O}\widehat{A\overset{r}{A}}B$$

Damit gilt aber $a_{OAB}\left(X'\right) = X$
Damit ist a_{OAB} surjektiv.
$\square$

Satz 8.7 *Es seien O, A, B drei beliebig gegebene Punkte auf einer Ebene e mit $O \neq A, B$. Dann gibt es genau eine Winkelbewegung mit Fixpunkt O, die A in B berfhrt.*

Beweis zu **??**: Liegen O, A, B nicht kollinear, so ergibt sich der Satz aus Satz **??**.
Es seien nun O, A und B kollinear. Whle ein $C \in e$, das nicht kollinear zu O, A, B liegt.

Dann existieren die Winkelbewegungen a_{OAC} und a_{OCB}. Damit ist $a_{OCB} \circ a_{OAC}$ ebenfalls eine Winkelbewegung mit Fixpunkt O und

$$\begin{aligned} a_{OCB} \circ a_{OAC}(A) &= a_{OCB}(C) \\ &= B \end{aligned}$$

Liegen die Punkte O, A, B kollinear, so ist eine Winkelbewegung mit Fixpunkt O, die A in B berfhrt, eine Dilatation mit Fixpunkt O, die A nach B berfhrt.
Wegen der Eindeutigkeit der Dilatationen ist die Winkelbewegung damit eindeutig gegeben.
□
Aus dem Beweis von Satz **??** ergibt sich:

Bem. 8.7* *Es gibt zu drei kollinearen Punkten $O, A, B \in e$ genau eine Dilatation mit Fixpunkt O, die A in B berfhrt.*

Jede Winkelbewegung mit Fixpunkt O ist entweder eine Winkeldrehung oder eine Dilatation mit Fixpunkt O.

Jede Dilatation mit Fixpunkt O ist die Verknpfung zweier Winkeldrehungen mit Fixpunkt O.

Liegen im folgenden O, A, B kollinear $O \neq A, B$, so bezeichne a_{OAB} die Dilatation mit Fixpunkt O, die A in B berfhrt.

Fr $A \neq O$ bezeichne a_{OAO} die Nullabbildung.

Satz 8.8 *Die Winkelbewegungen mit Fixpunkt O auf einer Ebene e bilden bezglich $\circ$ eine kommutative Gruppe.*

Beweis zu **??**: Es mu nur noch die Kommutativitt nachgewiesen werden.
Da Dilatationen als Verknpfung zweier Winkeldrehungen darstellbar sind, gengt es dazu, die Kommutativitt der Winkeldrehungen nachzuweisen.
Es seien zwei Winkeldrehungen a_{OAB}, a_{OAC} gegeben.
Dann liegen die Punkte O, A, B und O, A, C jeweils nicht kollinear.
Es mu gezeigt werden:

$$a_{OAB} \circ a_{OAC} = a_{OAC} \circ a_{OAB}$$

Setze zunchst

$$D := a_{OAB}(C)$$

$E := a_{OAC}\,(B)$

Dann gilt

$a_{OAB} \circ a_{OAC}\,(A) = D$

und

$a_{OAC} \circ a_{OAB}\,(A) = E$

Es gengt nun wegen der Eindeutigkeit der Winkelbewegungen $D = E$ nachzuweisen.
Es ist

$$
\begin{aligned}
\overset{r}{O}\widehat{D\overset{r}{O}}B &= a_{OAB}\left(\overset{r}{O}C\right)\widehat{\ } a_{OAB}\left(\overset{r}{O}A\right) \\
&= \overset{r}{O}\widehat{C\overset{r}{O}}A \\
&= a_{OAC}\left(\widehat{\overset{r}{O}A}\right)\overset{r}{O}A \\
&= a_{OAC}\left(\widehat{\overset{r}{O}B}\right)\overset{r}{O}B \\
&= \overset{r}{O}\widehat{E\overset{r}{O}}B
\end{aligned}
$$

und damit $\overset{r}{O}D{=}\overset{r}{O}E$. O, C und D knnen nicht kollinear liegen, da sonst O, A, B kollinear liegen wrden. Damit gilt $D = E$.
□

Satz 8.9 *Man kann aus dem affinen Relativ $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$ mit den Methoden aus Satz* **??** *einen Vektorraum $(\mathcal{V}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}})$ konstruieren.*

Dieser Vektorraum ist kommutativ.

Beweis zu **??**: Ist $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$ das zu einer affinen Ebene gehrige Relativ, so gilt auf ihm wegen der Existenz der Dilatationen der groe Satz von Desargues.
Weiterhin sind die Dilatationen kommutativ, die Ebene also pappussch.
Ist $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}})$ das affine Relativ zu einem mehr als zweidimensionalen affinen Raum, so gilt der groe affine Satz von Desargues ohnehin.
Die damit im Raum existierenden Dilatationen sind auf eine Ebene eingeschrnkt wiederum kommutativ.
Damit mssen sie aber auch insgesamt kommutativ sein. Wiederum ist der Raum also papussch.
□

8_ II Quadratische Dilatationen

Betrachte zunchst folgende Abbildung:

Def. 8.10 *Es sei eine Ebene e gegeben. Es seien drei nicht kollineare Punkte $O, A, B \in \mathcal{P}$ gegeben. e_{OAB} sei die von O, A, B aufgespannte Ebene. Es sei eine Abbildung*

$$a^i_{OAB} := \begin{cases} e_{OAB} & \longrightarrow & e_{OAB} \\ X & \longmapsto & a^i_{OAB}(X) \end{cases}$$

mit

$$\{a^i_{OAB}(X)\} = O\,\overset{r}{O}X\,\widehat{\overset{r}{O}B\overset{r}{O}}A \cap X\,\overset{r}{O}X\,\widehat{\overset{r}{A}B\overset{r}{O}}A$$

fr $X \neq O$ und

$$a^i_{OAB}(X) := O$$

fr $X = O$ definiert,die die zu a_{OAB} invertierte Winkeldrehung heie.

Liegen O, A, B kollinear mit $A \neq O$, so sei

$$a^i_{OAB} = a_{OAB}$$

Bem. 8.10* *Liegen O, A, B nicht kollinear, so ist a^i_{OAB} selbst eine Winkeldrehung.*

Es gilt fr jede Gerade g mit $g \subset e$ und $O \in g$

$$a^i_{OAB} = a_{Os_g(A)s_g(B)}$$

Insbesondere gilt

$$a^i_{OAB} = a_{OAs_{g_{OA}}(B)}$$

Beweis zu **??**: Betrachte die Punkte

$A' = s_g(A)$

und

$B' = s_g(B)$

Es gilt nach Satz **??**

$$\begin{aligned}
\widehat{\overset{r}{O}A'\overset{r}{O}B'} &= s_g\,(\overset{r}{O}\widehat{A)s_g\,(}\overset{r}{O}B) \\
&= \widehat{\overset{r}{O}B\overset{r}{O}A}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\widehat{\overset{r}{O}A'\overset{r}{A'}B'} &= s_g\,(\overset{r}{O}\widehat{A)s_g\,(}\overset{r}{A}B) \\
&= \widehat{\overset{r}{A}B\overset{r}{O}A}
\end{aligned}$$

Damit gilt aber $a^i_{OAB} = a_{OA'B'}$.
□

Satz 8.11 *Fr drei nichtkollineare Punkte O, A, B ist $a^i_{OAB} \circ a_{OAB}$ eine Dilatation auf der von den Punkten O, A, B aufgespannten Ebene e_{OAB}.*

Beweis zu **??**: Es gilt fr beliebiges $X \in e_{OAB}$ mit

$X_1 := a_{OAB}\,(X)$

$X_2 := a^i_{OAB}\,(X_1)$

$\widehat{\overset{r}{O}X\overset{r}{O}X_1} = \widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}B}$

und

$\widehat{\overset{r}{O}X_1\overset{r}{O}X_2} = \widehat{\overset{r}{O}B\overset{r}{O}A}$

Damit gilt

$\widehat{\overset{r}{O}X\overset{r}{O}X_2} = \widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}A}$

und damit $\overset{r}{O}X{=}\overset{r}{O}X_2$. Damit liegen O, X und $a^i_{OAB} \circ a_{OAB}\,(X)$ auf einer Geraden. Damit mu aber die Winkelbewegung

$a^i_{OAB} \circ a_{OAB}$

eine Dilatation auf der Ebene e_{OAB} sein.
□

Def. 8.12 *Es seien drei Punkte $O, A, B \in \mathcal{P}$ mit $O \neq A$ gegeben. Dann sei eine quadratische Dilatation q_{OAB} zu O, A, B folgendermaen definiert:*

$$q_{OAB} := \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ X & \longmapsto & q_{OAB}(X) \end{cases}$$

Dabei gelte auf jeder Ebene e mit $O, A, B \in e$

$$q_{OAB} = a^{i}_{OAB} \circ a_{OAB}$$

Auerhalb solcher Ebenen bezeichne fr $B \neq O$ q_{OAB} die eindeutig gegebene Erweiterung der Dilatation auf den Raum.

Fr $B = O$ sei q_{OAB} die Nullabbildung.

Def. 8.13 *Es seien zwei Punkte $O \neq I \in \mathcal{P}$ auf einem euklidischen Relativ $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ beliebig gewhlt. $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ sei der Krper der Dilatationen mit Fixpunkt O.*

Dann heie

$$\| \|_{OI} := \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{K}_{\mathcal{D}} \\ X & \longmapsto & \|X\|_{OI} := q_{OIX} \end{cases}$$

Dilatationsnorm auf $\mathcal{P}$ bezglich der Punkte O, I.

8_ III Quadratische Normen in der Ebene

Lemma 8.14 *Es seien Punkte $O \neq I$ und Punkte $A, B \neq O$ in einer Ebene e gegeben. Dann gilt*

$$a_{OIA}(B) = a_{OIB}(A)$$

Beweis zu **??**:

$$\begin{array}{ll} & a_{OBA}(B) = A \\ \asymp & a_{OBI} \circ a_{OIA}(B) = A \\ \asymp & a_{OIA}(B) = a_{OIB}(A) \end{array}$$

□

Lemma 8.15 *Es sei* $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ *ein euklidisches Relativ. Whle einen Punkt* $O \in \mathcal{P}$ *und betrachte den zugehrigen Vektorraum* $(\mathcal{P}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}})$.

Es seien Punkte $A, B \neq O$ *beliebig gewhlt. Zwei Punkte* $X, Y \in \mathcal{P}$ *seien so gewhlt, da* O, A, B, X, Y *auf einer Ebene liegen.*

Dann gilt

$$a_{OAB}(X+Y) = a_{OAB}(X) + a_{OAB}(Y)$$

Weiter gilt fr beliebige Punkte $A, X, Y \in \mathcal{P}$

$$s_{g_{OA}}(X+Y) = s_{g_{OA}}(X) + s_{g_{OA}}(Y)$$

Beweis zu **??**: Es gilt $a_{OAB}(O) = O$.
Da a_{OAB} Parallelogramme in Parallelogramme abbildet, mu $a_{OAB}(X+Y)$ der Parallelogrammschlu zu $a_{OAB}(X), O, a_{OAB}(Y)$ sein
Damit gilt

$$a_{OAB}(X+Y) = a_{OAB}(X) + a_{OAB}(Y)$$

Da auch Spiegelungen Parallelogramme in Parallelogramme abbilden, luft hier der Beweis analog.
□

Satz 8.16 *Es sei* $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ *ein euklidisches Relativ und* $\|\|_{OI}$ *eine Dilatationsnorm.*

Dann gilt

$$\|A\|_{OI} = 0 \rightarrowtail\!\!\!\leftarrowtail A = O$$

Beweis zu **??**: Es gilt

$$\begin{aligned} & \|A\|_{OI} = O \\ \rightarrowtail\!\!\!\leftarrowtail \quad & a^i_{OIA} \circ a_{OIA} = 0 \\ \rightarrowtail\!\!\!\leftarrowtail \quad & a^i_{OIA} = 0 \vee a_{OIA} = 0 \\ \rightarrowtail\!\!\!\leftarrowtail \quad & A = O \end{aligned}$$

□

Satz 8.17 *Es sei $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ ein ebenes euklidisches Relativ, $(\mathcal{V}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}})$ der zugehrige Vektorraum und $\|\|_{OI}$ eine Dilatationsnorm.*

Dann ist $\|\|_{OI}$ eine quadratische Norm.

Beweis zu **??**: Es seien $X, Y \in \mathcal{P}$ und eine Dilatation $k \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ beliebig vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \|X + k \cdot Y\|_{OI}(I) \\
= \quad & a^i_{OI(X+k\cdot Y)} \circ a_{OI(X+k\cdot Y)}(I) \\
= \quad & a_{OIs_{g_{OI}}(X+k\cdot Y)}(X + k \cdot Y) \\
= \quad & a_{OIs_{g_{OI}}(X+k\cdot Y)}(X) + a_{OIs_{g_{OI}}(X+k\cdot Y)}(k \cdot Y) \\
= \quad & a_{OIX}(s_{g_{OI}}(X + k \cdot Y)) + a_{OIk\cdot Y}(s_{g_{OI}}(X + k \cdot Y)) \\
= \quad & a_{OIX}(s_{g_{OI}}(X)) + a_{OIX}(s_{g_{OI}}(k \cdot Y)) \\
+ \quad & a_{OIk\cdot Y}(s_{g_{OI}}(X)) + a_{OIk\cdot Y}(s_{g_{OI}}(k \cdot Y)) \\
= \quad & a^i_{OIX}(X) + k \cdot a_{OIX}(s_{g_{OI}}(Y)) \\
+ \quad & k \cdot a_{OIs_{g_{OI}}(X)}(Y) + a^i_{OIk\cdot Y}(k \cdot Y) \\
= \quad & \|X\|_{OI}(I) + k^2 \|Y\|_{OI}(I) \\
+ \quad & k \cdot (a^i_{OIY}(X) + a^i_{OIX}(Y)) \\
= \quad & \|X\|_{OI}(I) + k^2 \|Y\|_{OI}(I) \\
+ \quad & k \cdot (a^i_{OIY}(X) + a^i_{OIX}(Y) + a^i_{OIX}(X) + a^i_{OIY}(Y) \\
- \quad & \|X\|_{OI}(I) \|Y\|_{OI}(I)) \\
= \quad & \|X\|_{OI}(I) + k^2 \|Y\|_{OI}(I) \\
+ \quad & k \cdot (a^i_{OIY}(X + Y) + a^i_{OIX}(X + Y) - \|X\|_{OI}(I) \|Y\|_{OI}(I)) \\
= \quad & \|X\|_{OI}(I) + k^2 \|Y\|_{OI}(I) \\
+ \quad & k \cdot (\|X + Y\|_{OI}(I) - \|X\|_{OI}(I) \|Y\|_{OI}(I))
\end{aligned}$$

Es seien $X, Y, Z \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben.Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \|X + Y + Z\|_{OI}(I) \\
= \quad & a^i_{OI(X+Y+Z)}(X + Y + Z) \\
= \quad & a^i_{OI(X+Y+Z)}(X) + a^i_{OI(X+Y+Z)}(Y) + a^i_{OI(X+Y+Z)}(Z) \\
= \quad & a^i_{OIX}(X + Y + Z) + a^i_{OIY}(X + Y + Z) + a^i_{OIZ}(X + Y + Z) \\
= \quad & a^i_{OIX}(X) + a^i_{OIX}(Y) + a^i_{OIX}(Z) \\
+ \quad & a^i_{OIY}(X) + a^i_{OIY}(Y) + a^i_{OIY}(Z) \\
+ \quad & a^i_{OIZ}(X) + a^i_{OIZ}(Y) + a^i_{OIZ}(Z)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \quad a^i_{OIX}(X+Y) + a^i_{OIX}(X+Z) - a^i_{OIX}(X) \\
+ & \quad a^i_{OIY}(X+Y) + a^i_{OIY}(Y+Z) - a^i_{OIY}(Y) \\
+ & \quad a^i_{OIZ}(X+Z) + a^i_{OIZ}(Y+Z) - a^i_{OIZ}(Z) \\
= & \quad a^i_{OI(X+Y)}(X) + a^i_{OI(X+Z)}(X) - a^i_{OIX}(X) \\
+ & \quad a^i_{OI(X+Y)}(Y) + a^i_{OI(Y+Z)}(Y) - a^i_{OIY}(Y) \\
+ & \quad a^i_{OI(X+Z)}(Z) + a^i_{OI(Y+Z)}(Z) - a^i_{OIZ}(Z) \\
= & \quad a^i_{OI(X+Y)}(X+Y) + a^i_{OI(X+Z)}(X+Z) + a^i_{OI(Y+Z)}(Y+Z) \\
- & \quad a^i_{OIX}(X) - a^i_{OIY}(Y) - a^i_{OIZ}(Z) \\
= & \quad \|X+Y\|_{OI}(I) + \|X+Z\|_{OI}(I) + \|Y+Z\|_{OI}(I) \\
- & \quad \|X\|_{OI}(I) - \|Y\|_{OI}(I) - \|Z\|_{OI}(I)
\end{aligned}
$$

$\square$

8_ IV Dilatationsnormen auf nicht ebenen euklidischen Relativen

Es sei nun $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ ein euklidisches Relativ, das nicht eben ist.

Es soll versucht werden, auch fr diesen Fall zu beweisen, da $\|\|_{OI}$ eine quadratische Norm ist.

Dazu wird zunchst eine weitere Dilatation eingefhrt.

Im folgenden bezeichne $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ ein euklidisches Relativ $O \neq I \in \mathcal{P}$ seien zwei beliebige fest gewhlte Punkte. $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ sei der Krper der Dilatationen mit Fixpunkt O.

Def. 8.18 *Es seien ein Punkt $A \neq O$ und ein Punkt $B \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben. Dann sei ein zugehriger Punkt P_{AB} gegeben durch*

$$P_{AB} := s_{g_{OA}}(B) + B$$

Weiter bezeichne fr $P_{AB} \neq O$ l_{AB} diejenige Dilatation, die den Punkt A in den Punkt P_{AB} berfhrt.

Fr $P_{AB} = O$ sei l_{AB} die Nullabbildung.

Beweis zu **??**: Es mu $P_{AB} \in g_{OA}$ gezeigt werden.
Es gilt $P_{AB} = (B, O, s_{g_{OA}}(B))\diamond$.
Damit gilt $O\overset{a}{B} = s_{g_{OA}}\overset{a}{(B)} P_{AB}$ und $B\overset{a}{P}_{AB} = s_{g_{OA}}\overset{a}{(B)} O$.

Weiter gilt $\overset{a}{O}B{=}O\overset{a}{s_{g_{OA}}}(B)$.
Damit gilt $\overset{a}{O}B{=}\overset{a}{P_{AB}}B$ und damit $(O,B,P_{AB})\bowtie= B$.
Fr $P_{AB}\neq O$ gilt dann:

$$\begin{aligned} s_{g_{OP_{AB}}}(B) &= (O,B,P_{AB})\diamond \\ &= s_{g_{OA}}(B) \end{aligned}$$

Damit mu aber $g_{OA} = g_{OP_{AB}}$ gelten.
□

Def. 8.19 *Es sei zu jedem Punkt $A \neq O$ eine Abbildung*

$$l_A := \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & K \\ X & \longmapsto & l_A(X) := l_{AX} \end{cases}$$

auf den Krper $\mathcal{K}_\mathcal{D}$ der Dilatationen definiert.
Fr $A = O$ sei

$$l_O := \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & K \\ X & \longmapsto & l_O(X) := 0 \end{cases}$$

Dann gilt

Satz 8.20 *Fr jedes $A \in \mathcal{P}$ ist l_A eine lineare Abbildung. Weiterhin gilt*

$$\bigwedge_{A,B\in\mathcal{P}} \bigwedge_{k\in\mathcal{K}_\mathcal{D}} l_{kA}(B) = k^{-1} l_A(B)$$

Beweis zu **??**: Fr $A = O$ gilt die Behauptung sofort.
Es sei im folgenden $A \neq O$.
Fr beliebige Punkte $B, C \in \mathcal{P}$ gilt

$$\begin{aligned} & l_A(B+C)(A) \\ =\ & s_{g_{OA}}(B+C) + B + C \\ =\ & s_{g_{OA}}(B) + s_{g_{OA}}(B) + B + C \\ =\ & l_A(B)(A) + l_A(C)(A) \end{aligned}$$

Weiter gilt fr beliebige Punkte $B \in \mathcal{P}$ und beliebige Dilatationen $k \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$

$$\begin{aligned} & l_A\left(k(B)\right)(A) \\ = \; & s_{g_{OA}}\left(k(B)\right) + k(B) \\ = \; & k(s_{g_{OA}}(B)) + k(B) \\ = \; & k(s_{g_{OA}}(B)) + B) \\ = \; & k l_A(B)(A) \end{aligned}$$

da Dilatationen Parallelogramme in Parallelogramme berfhren und Spiegelungen und Dilatationen nach Satz **??** vertauschbar sind. Weiter gilt

$$\begin{aligned} & l_{k(A)}(B)(k(A)) \\ = \; & s_{g_{Ok(A)}}(B) + B \\ = \; & s_{g_{OA}}(B) + B \\ = \; & l_A(B)(A) \\ = \; & k^{-1} l_A(B)(k(A)) \end{aligned}$$

□

Satz 8.21 *Es ist fr alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$*

$$\|B\|_{OA} \circ l_B(A) = l_A(B)$$

Beweis zu **??**: Gilt $A = O$, so gilt $l_A(B) = 0 = l_B(A)$. Damit gilt die Behauptung.
Fr $B = 0$ luft der Bweis analog.
Es sei im folgenden $A, B \neq O$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \|B\|_{OA} \circ l_B(A)(A) \\ = \; & a^i_{OAB} \circ l_B(A) \circ a_{OAB}(A) \\ = \; & a_{OAs_{g_{OA}}(B)}\left(s_{g_{OB}}(A) + A\right) \\ = \; & a_{OAs_{g_{OA}}(B)}\left(s_{g_{OB}}(A)\right) + s_{g_{OA}}(B) \\ = \; & a^i_{OAB}\left(s_{g_{OB}}(A)\right) + s_{g_{OA}}(B) \\ = \; & a_{Os_{g_{OB}}(A)B}\left(s_{g_{OB}}(A)\right) + s_{g_{OA}}(B) \\ = \; & B + s_{g_{OA}}(B) \end{aligned}$$

und

$l_A(B)(A) = s_{g_{OA}}(B) + B$

Damit gilt

$l_A(B)(A) = \|B\|_{OA} \circ l_B(A)(A)$

Damit gilt aber bereits

$l_A(B) = \|B\|_{OA} \circ l_B(A)$

□

Satz 8.22 *Es gilt fr alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$*

$$l_A(B) = 0 \Leftrightarrow l_B(A) = 0$$

Beweis zu **??**: Es gilt nach Satz **??**

$\|A\|_{OB} \circ l_A(B) = l_B(A)$

Gilt $l_A(B) = 0$, so mu danach auch $l_B(A) = 0$ gelten.
□

Satz 8.23 *Liegen die Punkte $O, A, B, C \in \mathcal{P}$ in einer Ebene, so gilt*

$$l_A(B) \circ l_B(C) \circ l_C(A) = l_B(A) \circ l_C(B) \circ l_A(C)$$

Beweis zu **??**: Gilt $l_A(B) = 0$, so gilt auch $l_B(A) = 0$. Damit gilt in diesem Fall die Gleichung.
Fr $l_B(C) = 0$ oder $l_C(A) = 0$ gilt die Gleichung aus analogen Grnden.
Es sei nun $l_A(B), l_B(C), l_C(A) \neq 0$ vorausgesetzt.
Dann gilt

$$\begin{array}{ll} & l_A(B) \circ l_B(C) \circ l_C(A) = l_B(A) \circ l_C(B) \circ l_A(C) \\ \Leftrightarrow & \|B\|_{OA} \circ \|C\|_{OB} \circ \|A\|_{OC} = \iota \end{array}$$

Nun gilt auf der von O, A, B, C aufgespannten Ebene

$$\begin{aligned}
& \|B\|_{OA} \circ \|C\|_{OB} \circ \|A\|_{OC} \\
= \; & a^i_{OAB} \circ a_{OAB} \circ a^i_{OBC} \circ a_{OBC} \circ a^i_{OCA} \circ a_{OCA} \\
= \; & a_{Os_{g_{OA}}(C)A} \circ a_{Os_{g_{OA}}(B)s_{g_{OA}}(C)} \circ a_{OAs_{g_{OA}}(B)} \circ a_{OCA} \circ a_{OBC} \circ a_{OAB} \\
= \; & a_{OAA} \circ a_{OAA} \\
= \; & \iota
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.
□

8_ V Senkrechte

Satz 8.24 *Ist $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ ein euklidisches Relativ, dessen zugehriger Vektorraum $(\mathcal{V}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}})$ mehr als zweidimensional ist, so gilt im Krper $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ $2 \neq 0$.*

Beweis zu **??**: Angenommen, es gilt im Krper $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ $2 = 0$. Es sei ein Punkt $A \neq O$ gegeben. Dann gilt fr $B \notin g_{OA}$

$$\begin{aligned}
l_A(B)(A) &= s_{g_{OA}}(B) + B \\
&\neq O
\end{aligned}$$

da sonst $s_{g_{OA}}(B) = B$ gelten mte. Damit ist $l_A(B)$ nicht die Nullabbildung. Es sei nun ein Punkt $C \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben. Setze

$$D := \frac{l_A(C)}{l_A(B)} B + C$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
l_A(D) &= l_A(C) + l_A(C) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
s_{g_{OA}}(D) + D &= P_{AD} \\
&= l_A(D)(A) \\
&= O
\end{aligned}$$

Damit gilt aber $D = s_{g_{OA}}(D)$.
Damit mu fr jedes $C \in \mathcal{P}$

$$C + \frac{l_A(C)}{l_A(B)} B \in g_{OA}$$

gelten.
Damit kann die Geometrie hchstens zweidimensional sein.
$\square$

Beim Beweis,da $\|\|_{OI}$ auch fr mehrdimensionale Geometrien eine euklidische Norm ist, kann damit $2 \neq 0$ vorausgesetzt werden.

Fr diesen Fall kann der Begriff der Senkrechten fr die euklidischen Geometrien eingefhrt werden.

Def. 8.25 *Zwei Geraden $g \neq h$ sollen senkrecht zueinander heien, in Zeichen*

$$g \perp h$$

falls sie einen gemeinsamen Schnittpunkt haben und falls

$$\bigwedge_{A \in g} s_h(A) \in g$$

gilt.

Bem. 8.25* *Es gilt*

$$g \perp h \succ h \perp g$$

Beweis zu **??**: Es gelte $g \perp h$.
Whle einen Punkt $G \in g$ mit $G \notin h$.
Dann gilt $G' := s_h(G) \in g$ und wegen $G \notin h$ $G \neq G'$.
Whle einen Punkt $H \in h$ beliebig.
Es gilt $GH \overset{a}{=} G'H$.
Damit gilt $(G, H, G') \bowtie = H$.
Damit gilt fr $H' := s_g(H)$ $H' = (G, H, G')\diamond$.
Damit gilt aber $GH \overset{a}{=} G'H'$ und $G'H \overset{a}{=} GH'$.
Damit gilt

$$GH' \overset{a}{=} G'H \overset{a}{=} GH \overset{a}{=} G'H'$$

H' ist also Fixpunkt der Trapezspiegelung $s_{GG'}$.
Auf der Ebene, die g und h aufspannen, gilt $s_{GG'} = s_h$. Damit mu $H' \in h$ gelten.
$\square$

Satz 8.26 *Es sei eine Gerade $g \subset \mathcal{P}$ und ein Punkt $A \notin g$ gegeben. Dann gibt es genau eine Gerade h mit $A \in h$ und $g \perp h$.*

Beweis zu **??**: Betrachte den Punkt $A' := s_g(A)$. Wegen $A \notin g$ gilt $A \neq A'$.
Damit kommt als Senkrechte zu g durch A nur die Gerade $g_{AA'}$ in Frage.
Da Spiegelungen Geraden auf Geraden abbilden, mu fr $g \perp g_{AA'}$ nur noch ein gemeinsamer Schnittpunkt von g und $g_{AA'}$ nachgewiesen werden.
Da g, A und A' auf einer Ebene liegen, gengt es dazu zu zeigen:

$g \nparallel g_{AA'}$

Angenommen, es gelte $g \parallel g_{AA'}$.
Whle zwei Punkte $B \neq C \in g$. Dann gibt es eine Dilatation k' mit $A - A' = k'(B - C)$. Es gilt

$$
\begin{array}{ll}
 & A - A' = k'(B - C) \\
\not\asymp & A - (B, (B, A, C) \bowtie, C)\diamond = k'(B - C) \\
\not\asymp & A - B - C + A + \dfrac{\|A - B\| - \|A - C\|}{\|B - C\|}(B - C) = k'(B - C)
\end{array}
$$

Damit gibt es eine Dilatation k mit

$$A = \frac{1}{2}(B + C) + k(B - C)$$

Damit mte aber entgegen der Voraussetzung $A \in g$ gelten.
$\square$

Bem. 8.26* *Gilt im Krper $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ der Dilatationen $2 = 0$, so gilt fr alle $A, B, C \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B$*

$$C = s_{g_{AB}}(C) \vee C s_{g_{OA}}^{\;\;r}(C) {=} \overset{r}{A}B$$

Beweis zu **??**: Es ist

$$
\begin{aligned}
s_{g_{AB}}(C) &= (A, (A, C, B) \bowtie, B)\diamond \\
&= A + (A, C, B) \bowtie + B
\end{aligned}
$$

und fr ein geeignetes $k \in K$

$C + (A, C, B) \bowtie = k(A + B)$

da $C(A, \overset{r}{C}, B) \bowtie = \overset{r}{A}B$ oder $C = (A, C, B) \bowtie$ gelten mu.
Damit gilt

$C + s_{g_{AB}}(C) = (1 + k)(A + B)$

Damit gilt die Behauptung.
□

Def. 8.27 *Zu einer Geraden g und einem Punkt $A \notin g$ bezeichne*

$$A_{\perp g}$$

den Schnittpunkt der Geraden g und der nach Satz **??** *eindeutig existierenden Geraden h.*

Satz 8.28 *Es seien Geraden g_1, g_2 und h auf einer Ebene e gegeben. Gilt dann $g_1 \parallel g_2$ und $g_1 \perp h$, so gilt auch $g_2 \perp h$.*

Beweis zu **??**: Es sei $g_1 \parallel g_2$ und $h \perp g_1$. Dann gilt

$\bigwedge_{A \in g_1} s_h(A) \in g_1$

Da Spiegelungen parallele Geraden auf parallele Geraden abbilden, mu $s_h(g_2) = g_3$ mit $g_2 \parallel g_3$ gelten.
Da alle Geraden in einer Ebene liegen, haben aber g_2 und h einen Schnittpunkt S und es gilt $S = s_h(S) \in g_3$.
Damit mu $g_2 = g_3$ gelten.
Damit gilt $g_2 \perp h$.
□

Satz 8.29 *Es seien paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, h mit einem gemeinsamen Schnittpunkt A und $g_1 \perp h$ und $g_2 \perp h$ gegeben.*

e sei die von den Geraden g_1 und g_2 aufgespannte Ebene. Dann gilt fr jede Gerade $g_3 \subset e$ mit $A \in g_3$

$$g_3 \perp h$$

Beweis zu **??**: Es sei ein Punkt $B \in h$ mit $B \neq A$ gegeben. Betrachte

$B_1 := s_{g_1}(B)$

$B_2 := s_{g_2}(B)$

Es gilt $AB \overset{a}{=} AB_1 \overset{a}{=} AB_2$ und $B, B_1, B_2 \in h$. Weiter gilt $B \neq B_1, B_2$. Damit ist (B, A, B_i, A) fr $i = 1, 2$ ein Abstandsparallelogramm.
Da alle Punkte kollinear liegen, mu damit (B, A, B_i, A) Parallelogramm sein. Damit mu $B_1 = B_2 =: B'$ gelten. Betrachte die Trapezspiegelung $s_{BB'}$. Da diese auf der Ebene, die durch h und g_1 aufgespannt wird, der Geradenspiegelung s_{g_1} entspricht, sind alle Punkte der Geraden g_1 Fixpunkte von $s_{BB'}$. Entsprechendes gilt fr die Gerade g_2.
Damit sind aber nach Satz **??** alle Punkte der von g_1 und g_2 aufgespannten Ebene - also insbesondere auch die Punkte von g_3 - Fixpunkte von $s_{BB'}$.
Auf der von g_3 und h aufgespannten Ebene sind also alle Punkte von g_3 Fixpunkte von $s_{BB'}$. Damit gilt aber auf dieser Ebene $s_{g_3} = s_{BB'}$.
Damit aber gilt $s_{g_3}(B) = B' \in h$.
□

Satz 8.30 *Fr zwei Punkte $A \neq O$ und $B \notin g_{OA}$ gilt stets*

$$B_{\perp g_{OA}} = O \rightthreetimes l_A(B) = 0$$

Beweis zu **??**:

$$\begin{aligned}
& B_{\perp g_{OA}} = O \\
\rightthreetimes\ & O \in g_{Bs_{g_{OA}}(B)} \\
\rightthreetimes\ & OB \overset{r}{=} Os_{g_{OA}}(B) \\
\rightthreetimes\ & (B, O, s_{g_{OA}}(B))\diamond = O \\
\rightthreetimes\ & B + s_{g_{OA}}(B) = O \\
\rightthreetimes\ & l_A(B) = 0
\end{aligned}$$

□

Satz 8.31 *Fr jeden Punkt $A \neq O$ gilt*

$$l_A(A) = 2$$

Fr zwei Punkte $A \neq O$ und $B \notin g_{OA}$ mit $g_{OA} \perp g_{AB}$ gilt stets

$$l_A(B) = 2$$

Beweis zu **??**: $l_A(A)$ ist diejenige Dilatation, die A in den Punkt

$P_{AA} = s_{g_{OA}}(A) + A = 2A$

berfhrt. Damit gilt

$l_A(A) = 2$

Betrachte nun die Gerade $g_{O(B-A)} = g_{(A-A)(B-A)} \parallel g_{AB}$.
Es gilt $g_{O(B-A)} \perp g_{OA}$ und damit nach Satz **??**

$l_A(B - A) = 0$

Da l_A eine lineare Abbildung ist, gilt damit

$l_A(B) = l_A(A) = 2$

□

Satz 8.32 *Es seien drei nichtkollineare Punkte* $A, B, C \neq O$ *mit* $O, A, B, C \in e$ *fr eine Ebene* e *und mit* $g_{AC} \perp g_{OC}$ *und* $g_{BC} \perp g_{OC}$ *gegeben. Weiter gelte* $g_{OA} \not\perp g_{OB}$
Es bezeichne

$$A' := B_{\perp gOA}$$

$$B' := A_{\perp gOB}$$

Dann gilt $g_{A'B'} \perp g_{OC}$.

Beweis zu **??**: Es gilt nach Satz **??**

$l_A(B) \circ l_B(C) \circ l_C(A) = l_B(A) \circ l_C(B) \circ l_A(C)$

Nach Satz **??** gilt weiter $l_A(C) = 2 = l_B(C)$.
Damit gilt

$l_A(B) \circ l_C(A) = l_B(A) \circ l_C(B)$

Weiter gilt fr geeignete Dilatationen $k_1, k_2 \in \mathcal{K}_\mathcal{D}$ $A = k_1 A'$ und $B = k_2 B'$.
Dabei gilt $k_1, k_2 \neq 0$.
Wre nmlich $k_1 = 0$, so wre $A' = O$ und damit $g_{OB} \perp g_{OA}$. $k_2 \neq 0$ folgt entsprechend.

Damit gilt

$$\begin{aligned} & k_1^{-1} k_2 l_{A'}(B') \circ k_1 l_C(A') = k_2^{-1} k_1 l_{B'}(A') \circ k_2 l_C(B') \\ \between \quad & k_2 l_{A'}(B') \circ l_C(B') = k_1 l_{B'}(A') \circ l_C(A') \end{aligned}$$

Nun gilt $g_{A'B} \perp g_{OA'}$. Damit gilt $l_{A'}(B) = 2$ und damit $l_{A'}(B') = 2k_2^{-1}$.
Entsprechend gilt $l_{B'}(A') = 2k_1^{-1}$.
Damit gilt

$l_C(B') = l_C(A')$

Damit gilt $l_C(B' - A') = 0$ und also $g_{OC} \perp g_{O(B'-A')}$.
Damit gilt auch $g_{OC} \perp g_{A'B'}$.
$\square$

Satz 8.33 *Es seien drei nichtkollineare Punkte $A, B, C \neq O$ mit $g_{AC} \perp g_{OC}$ und $g_{BC} \perp g_{OC}$ gegeben. Weiter gelte $g_{OA} \not\perp g_{OB}$.*

Es sei

$$A' := B_{\perp gOA}$$

$$B' := A_{\perp gOB}$$

Dabei gelte $A', B' \neq O$.

Dann gilt

$$A'_{\perp g_{OC}} = B'_{\perp g_{OC}}$$

Beweis zu **??**: Es sei $C_1 := A'_{\perp g_{OC}}$.
Um $C_1 = B'_{\perp g_{OC}}$ zu zeigen, gengt es dann $g_{C_1 B'} \perp g_{OC}$ nachzuweisen.
Liegen die Punkte O, A, B, C in einer Ebene, so gilt nach Satz **??** $g_{A'B'} \perp g_{OC}$.
Wegen $g_{A'C_1} \perp g_{OC}$ und wegen der Eindeutigkeit der Senkrechten von A' auf g_{OC} gilt dann $g_{A'B'} = g_{A'C_1} = g_{B'C_1}$ und damit auch $g_{B'C_1} \perp g_{OC}$.
Angenommen, C liegt nicht auf der Ebene e_{OAB}. Betrachte die Geraden $g_1, g_2 \subset e$ mit $g_1 \perp g_{OA}$ $A \in g_1$ und $g_2 \perp g_{OB}$ $B \in g_2$.
C' sei der Schnittpunkt von g_1 und g_2.
Dann bilden A, B, C' und A', B' eine Konfiguration wie in Satz **??**.
Damit gilt $g_{A'B'} \perp g_{OC'}$.

Weiter gilt wegen $g_{OA} \perp g_{AC'}$ und $g_{OA} \perp g_{AC}$ auch $g_{OA} \perp h_1$, wobei h_1 die Parallele zu $g_{CC'}$ durch A sei.
Entsprechend gilt fr h_2 als die Parallele von $g_{CC'}$ durch B $g_{OB} \perp h_2$.
Damit gilt aber fr h_3 als die Parallele von $g_{CC'}$ durch O $g_{OA} \perp h_3$ und $g_{OB} \perp h_3$.
Sei h_4 die Parallele von $g_{A'B'}$ durch O. Dann gilt auch $h_4 \perp h_3$.
Nun sei C'' der Schnittpunkt von $g_{A'B'}$ und $g_{OC'}$. h sei die Parallele zu $g_{CC'}$ durch C''.
Dann gilt $h \perp g_{A'B'}$.
Wegen $h \perp g_{A'B'}$ und $g_{A'B'} \perp g_{OC'}$ gilt fr die Parallele h' von g_{OC} durch A':

$$h' \perp g_{A'B'}$$

Wegen $g_{C_1A'} \perp g_{OC}$ gilt auch $g_{C_1A'} \perp h'$ und damit $g_{C_1B'} \perp g_{OC}$.
$\square$

Satz 8.34 *Fr alle Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ gilt*

$$l_A(B) \circ l_B(C) \circ l_C(A) = l_B(A) \circ l_C(B) \circ l_A(C)$$

Beweis zu **??**: Fr $A = O$ gilt $l_A(B) = 0 = l_B(A)$.
Fr $B = O$ und fr $C = O$ gilt Entsprechendes.
Im folgenden seien $A, B, C \neq O$ vorausgesetzt. Es sei

$$A' := C_{\perp g_{OA}}$$

$$B' := C_{\perp g_{OB}}$$

Gilt $A' = O$, so gilt $g_{OA} \perp g_{OC}$ und damit $l_A(C) = 0 = l_C(A)$. In diesem Fall gilt also die Gleichung.
Analoges gilt fr $B' = O$.
Es sei $A', B' \neq O$. Dann gibt es Dilatationen $k_1, k_2 \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ mit $k_1, k_2 \neq 0$ und $A' = k_1 A$, $B' = k_2 B$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} & l_A(B) \circ l_B(C) \circ l_C(A) = l_B(A) \circ l_C(B) \circ l_A(C) \\ \asymp \quad & l_{A'}(B') \circ l_{B'}(C) \circ l_C(A') = l_{B'}(A') \circ l_C(B') \circ l_{A'}(C) \end{aligned}$$

Wegen $g_{O(C-A')} \perp g_{OA}$ gilt weiter $l_{A'}(C - A') = 0$ und damit

$$l_{A'}(C) = l_{A'}(A') = 2$$

und entsprechend $l_{B'}(C) = 2$. Es bleibt also nur nachzuweisen

$$l_{A'}(B') \circ l_C(A') = l_{B'}(A') \circ l_C(B')$$

Sei weiter

$$A'' := B'_{\perp g_{OA'}}$$

$$B'' := A'_{\perp g_{OB'}}$$

Gilt $A'' = O$, so gilt $g_{OA'} \perp g_{OB'}$ und damit $l_{A'}(B') = l_{B'}(A')$.
Entsprechendes gilt fr $B'' = O$. Auch in diesen Fllen ist der Beweis damit gefhrt.
Gilt $A'', B'' \neq O$,so gibt es wieder Dilatationen $k_1, k_2 \neq 0$ mit $A'' = k_1 A'$ und $B'' = k_2 B'$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} & l_{A'}(B') \circ l_C(A') = l_{B'}(A') \circ l_C(B') \\ \asymp & k_1^{-1} l_{A'}(B') \circ l_C(A'') = k_2^{-1} l_{B'}(A') \circ l_C(B'') \end{array}$$

Nun erfllen A', B', C und A'', B'' die Vorausstzungen des Satzes **??**, es gilt also

$$C_1 := A''_{\perp g_{OC}} = B''_{\perp g_{OC}}$$

Damit gilt $g_{OC_1 - A''} \perp g_{OC}$ und $g_{OC_1 - B''} \perp g_{OC}$ und damit

$$l_C(C_1 - A'') = 0$$

und

$$l_C(C_1 - B'') = 0$$

Damit gilt

$$k l_C(C_1) = l_C(A'') = l_C(B'')$$

Es bleibt also nur noch nachzuweisen:

$$k_1^{-1} l_{A'}(B') = k_2^{-1} l_{B'}(A')$$

Nun gilt $g_{O(A''-B')} \perp g_{OA'}$ und damit

$$\begin{aligned} l_{A'}(B') &= l_{A'}(A'') \\ &= k_1 l_{A'}(A') \\ &= 2k_1 \end{aligned}$$

und entsprechend $l_{B'}(A') = 2k2$. Damit gilt

$$\begin{array}{ll} & k_1^{-1} l_{A'}(B') = k_2^{-1} l_{B'}(A') \\ \asymp & k_1^{-1} 2k_1 = k_2^{-1} 2k_2 \\ \asymp & 2 = 2 \end{array}$$

Damit ist der Beweis gefhrt.

□

Def. 8.35 *Es sei eine Abbildung*

$$f := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}^2 & \longrightarrow & \mathcal{K}_{\mathcal{D}} \\ (X, Y) & \longmapsto & f(X, Y) \end{array} \right.$$

mit

$$f(X, Y) := \frac{l_I(Y)}{l_Y(I)} l_Y(X)$$

fr $l_Y(I) \neq 0$ *und*

$$f(X, Y) := f(X, Y + I) - f(X, I)$$

fr $l_Y(I) = 0$ *definiert.*

Beweis zu **??**: Damit $f(X, Y)$ fr $l_Y(I) = 0$ definiert ist, mu $l_{Y+I}(I) \neq 0$ und $l_I(I) \neq 0$ gelten.
Es ist nach Satz **??**

$l_I(I) = 2 \neq 0$

Weiter gilt $l_{Y+I}(I) \neq 0$ genau dann, wenn $l_I(Y + I) \neq 0$ gilt.Es ist

$l_I(Y + I) = l_I(Y) + l_I(I) = 0 + 2 \neq 0$

□

Satz 8.36 *f ist eine symmetrische bilineare Abbildung.*

Beweis zu **??**: Da l_B linear ist, ist f im ersten Argument linear.
Es gilt fr alle $A, B \in \mathcal{P}$ mit $l_A(I) \neq 0$ und $l_B(I) \neq 0$

$$\begin{aligned}
f(A,B) &= \frac{l_I(B)}{l_B(I)} l_B(A) \\
&= \frac{l_I(B)\, l_B(A)\, l_A(I)}{l_B(I)\, l_A(I)} \\
&= \frac{l_B(I)\, l_A(B)\, l_I(A)}{l_B(I)\, l_A(I)} \\
&= \frac{l_I(A)}{l_A(I)} l_A(B) \\
&= f(B,A)
\end{aligned}$$

Gilt nun $l_B(I) = 0$ und $l_A(I) \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned}
f(A,B) &= f(A, B+I) - f(A,I) \\
&= f(B+I, A) - f(I,A) \\
&= f(B,A)
\end{aligned}$$

Fr $l_B(I) \neq 0$ und $l_A(I) = 0$ luft der Beweis analog.
Gilt $l_B(I) = 0$ und $l_A(I) = 0$, so gilt

$$\begin{aligned}
& f(A,B) \\
=\ & f(A, B+I) - f(A,I) \\
=\ & f(A+I, B+I) - f(I, B+I) - f(A+I, I) + f(I,I) \\
=\ & f(B+I, A+I) - f(B+I, I) - f(I, A+I) + f(I,I) \\
=\ & f(B, A+I) - f(B,I) \\
=\ & f(B,A)
\end{aligned}$$

Damit ist f symmetrisch.
Damit ist f eine symmetrische Bilinearform.
□

Satz 8.37 *Es gelten zwischen $\|\|_{OI}$ und f folgende Beziehungen:*

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{P}} f(A,A) = 2\,\|A\|_{OI}$$

$$\bigwedge_{A,B\in\mathcal{P}} f(A,B) = \|A+B\|_{OI} - \|A\|_{OI} - \|B\|_{OI}$$

Beweis zu **??**: Es sei ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben mit $l_A(I) \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(A,A) &= \frac{l_I(A)}{l_A(I)} l_A(A) \\ &= \|A\|_{OI}\, l_A(A) \\ &= 2\,\|A\|_{OI} \end{aligned}$$

Es sei nun $l_A(I) = 0$.
Da $O, I, A, A+I, A-I$ auf einer Ebene liegen, gilt nach Satz **??**

$$\|A-I\|_{OI} = \|A\|_{OI} + \|I\|_{OI} - (\|A+I\|_{OI} - \|A\|_{OI} - \|I\|_{OI})$$

und damit

$$2\,\|A\|_{OI} = \|A-I\|_{OI} + \|A+I\|_{OI} - 2\,\|I\|_{OI}$$

Weiter gilt $l_{A+I}(I) \neq 0$ und $l_{A-I}(I) \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\,\|A\|_{OI} &= \|A-I\|_{OI} + \|A+I\|_{OI} - 2\,\|I\|_{OI} \\ &= \frac{1}{2}(f(A-I,A-I) + f(A+I,A+I)) - f(I,I) \\ &= \frac{1}{2}(2f(A,A) + 2f(I,I)) - f(I,I) \\ &= f(A,A) \end{aligned}$$

Weiter gilt fr alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} & 2\,(\|A+B\|_{OI} - \|A\|_{OI} - \|B\|_{OI}) \\ =\ & f(A+B,A+B) - f(A,A) - f(B,B) \\ =\ & f(A,A) + f(A,B) + f(B,A) + f(B,B) \\ & -f(A,A) - f(B,B) \\ =\ & f(A,B) + f(B,A) \\ =\ & 2f(A,B) \end{aligned}$$

Wegen $2 \neq 0$ folgt daraus die Behauptung.
□

Satz 8.38 $\|\|_{OI}$ *ist eine euklidische Norm.*

Beweis zu **??**: Es gilt fr alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ und alle Dilatationen $k \in K$

$$\begin{aligned}
& 2\,\|A + kB\|_{OI} \\
= \; & f\,(A + kB, A + kB) \\
= \; & f\,(A, A) + k^2 f\,(B, B) + kf\,(A, B) + kf\,(B, A) \\
= \; & 2\,\|A\|_{OI} + 2k^2\,\|B\|_{OI} + 2k(\|A + B\|_{OI} - \|A\|_{OI} - \|B\|_{OI})
\end{aligned}$$

und damit

$$\|A + kB\|_{OI} = \|A\|_{OI} + k^2\,\|B\|_{OI} + k(\|A + B\|_{OI} - \|A\|_{OI} - \|B\|_{OI})$$

Weiter gilt fr alle Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
& 2\,\|A + B + C\|_{OI} \\
= \; & f\,(A + B + C, A + B + C) \\
= \; & f\,(A + B, A + B) + f\,(A + C, A + C) + f\,(B + C, B + C) \\
& - f\,(A, A) - f\,(B, B) - f\,(C, C) \\
= \; & 2(\|A + B\|_{OI} + \|A + C\|_{OI} + \|B + C\|_{OI} \\
& - \|A\|_{OI} - \|B\|_{OI} - \|C\|_{OI})
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
& \|A + B + C\|_{OI} \\
= \; & \|A + B\|_{OI} + \|A + C\|_{OI} + \|B + C\|_{OI} \\
- \; & \|A\|_{OI} - \|B\|_{OI} - \|C\|_{OI}
\end{aligned}$$

$$\|A\|_{OI} = 0 \rtimes A = O$$

gilt bereits nach Satz **??**.
Damit ist $\|\|_{OI}$ eine euklidische Norm.
□

9 Synonimitt von euklidischen Relativen und euklidischen Geometrien

Satz 9.1 *Es sei* $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ *ein euklidisches Relativ.*

Zwei Punkte $O, I \in \mathcal{P}$ *seien beliebig gewhlt.*

$\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ *sei der Krper der Dilatationen auf* $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ *mit dem Fixpunkt* O.

Dann ist $(\mathcal{P}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}})$ *ein Vektorraum und* $\|\|_{OI}$ *eine quadratische Norm auf diesem Vektorraum.*

Die euklidische Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}}, \|\|_{OI})$ *erfllt die Bedingung* **??**.

Beweis zu **??**: $\|\|_{OI}$ ist in jedem Fall eine quadratische Norm.
Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}})$ zweidimensional, so folgt das nach Satz **??**.
Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}})$ nicht zweidimensional, so folgt das nach Satz **??**.
Es sei im folgenden $char\mathcal{K}_{\mathcal{D}} = 2$.
$A, B, C \in \mathcal{P}$ seien beliebig gewhlt. Setze zunchst

$$A' := A - B$$

$$B' := B - C$$

Dann gilt

$$A' + B' = A - B + B - C = A - C$$

Weiterhin liegen die Punkte O, A', B' genau dann auf einer Geraden, wenn die Punkte $O + B, A' + B, B' + B$ -also B, A, C - auf einer Geraden liegen.
Es gengt also fr beliebige Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ zu zeigen:

$$\|A\|_{OI} + \|B\|_{OI} = \|A + B\|_{OI}$$

gilt genau dann, wenn O, A, B auf einer Geraden liegen.
Es gilt

$$\begin{aligned}
& \|A\|_{OI} + \|B\|_{OI} = \|A + B\|_{OI} \\
\asymp\ & a^i_{OIA} \circ a_{OIA}(I) + a^i_{OIB} \circ a_{OIB}(I) = a^i_{OI(A+B)} \circ a_{OI(A+B)}(I) \\
\asymp\ & a_{OIs_{g_{OI}}(A)}(A) + a_{OIs_{g_{OI}}(B)}(B) = a_{OIs_{g_{OI}}(A+B)}(A + B)
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
& a_{OIs_{g_{OI}}(A+B)}(A+B) \\
= \ & a_{OIs_{g_{OI}}(A+B)}(A) + a_{OIs_{g_{OI}}(A+B)}(B) \\
= \ & a_{OIA}(s_{g_{OI}}(A+B)) + a_{OIB}(s_{g_{OI}}(A+B)) \\
= \ & a_{OIA}(s_{g_{OI}}(A)) + a_{OIA}(s_{g_{OI}}(B)) \\
& + a_{OIB}(s_{g_{OI}}(A)) + a_{OIB}(s_{g_{OI}}(B))
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\|A\|_{OI} + \|B\|_{OI} = \|A+B\|_{OI} \bowtie a_{OIA}(s_{g_{OI}}(B)) = a_{OIB}(s_{g_{OI}}(A))$$

Angenommen, die Punkte O, A, B liegen auf einer Geraden. Dann gilt

$$\begin{aligned}
a_{OIA}(s_{g_{OI}}(B)) &= a_{OIs_{g_{OI}}(B)}(A) \\
&= a_{Os_{g_{OB}}(I)B}(A) \\
&= a_{Os_{g_{OB}}(I)A}(B) \\
&= a_{Os_{g_{OA}}(I)A}(B) \\
&= a_{OIs_{g_{OI}}(A)}(B) \\
&= a_{OIB}(s_{g_{OI}}(A))
\end{aligned}$$

Es sei nun umgekehrt

$$a_{OIA}(s_{g_{OI}}(B)) = a_{OIB}(s_{g_{OI}}(A))$$

vorausgesetzt.
Setze

$$X := a_{OIA}(s_{g_{OI}}(B))$$

Dann gelten die folgenden Winkelbeziehungen:

$$\overset{a}{O}\widehat{I}\overset{a}{O}A = O\overset{a}{s}_{g_{OI}}\widehat{(B)}\overset{a}{O}X$$

$$\overset{a}{O}\widehat{I}\overset{a}{O}B = O\overset{a}{s}_{g_{OI}}\widehat{(A)}\overset{a}{O}X$$

Da Spiegelungen die Winkel umkehren, ergibt sich mit

$$X' := s_{g_{OI}}(X)$$

$\overset{a}{O}\overset{\frown}{IO}\overset{a}{A} = \overset{a}{O}\overset{\frown}{X'O}\overset{a}{B}$

$\overset{a}{O}\overset{\frown}{IO}\overset{a}{B} = \overset{a}{O}\overset{\frown}{X'O}\overset{a}{A}$

Damit ergibt sich

$\overset{a}{O}\overset{\frown}{AO}\overset{a}{B} = \overset{a}{O}\overset{\frown}{BO}\overset{a}{A}$

Damit gilt aber

$s_{g_{OA}} \circ s_{g_{OB}}(A) = s_{g_{OB}} \circ s_{g_{OA}}(A)$

und damit

$s_{g_{OA}}(s_{g_{OB}}(A)) = s_{g_{OB}}(A)$

Damit gilt $s_{g_{OB}}(A) \in g_{OA}$.
Nach Bemerkung **??** gilt $\overset{r}{O}B{=}s_{g_{OB}}\overset{r}{(}A)\, A$ oder $s_{g_{OB}}(A) = A$.
Fr $s_{g_{OB}}(A) = A$ mu $A \in g_{OB}$ gelten. Damit liegen in diesem Fall O, A, B kollinear.
Fr $\overset{r}{O}B{=}s_{g_{OB}}\overset{r}{(}A)\, A{=}\overset{r}{O}A$ liegen O, A, B ebenfalls kollinear.
Damit gilt fr $char K = 2$

$\|A - B\|_{OI} + \|B - C\|_{OI} = \|A - C\|_{OI}$

genau dann, wenn die Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen.
□
Zu einer euklidischen Geometrie $(\mathcal{V}, \mathcal{K}, \|\|)$, die die Bedingung **??** erfllt, kann nach dem Verfahren aus Satz **??** ein euklidisches Relativ gebildet werden.

Zu jedem euklidischen Relativ wiederum kann nach Satz **??** eine euklidische Geometrie $(\mathcal{V}, \mathcal{K}, \|\|)$ gefunden werden, die die Bedingung **??** erfllt.

Es mu noch gezeigt werden, da beide Verfahren einander umkehren, die Systeme also synonym sind.

Dazu zeigen wir zunchst:

Satz 9.2 *Es sei $\|\|_{OI}$ eine Dilatationsnorm auf einem ebenen euklidischen Relativ $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$. Dann gilt fr alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$*

$$\overset{a}{O}A{=}\overset{a}{O}B \rtimes \|A\|_{OI} = \|B\|_{OI}$$

Beweis zu **??**: Es seien O, A, B kollinear. Dann gilt $B = kA$ fr eine geeignete Dilatation $k \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$.
Damit gilt

$$
\begin{aligned}
& \|A\|_{OI} = \|B\|_{OI} \\
\asymp\quad & k^2 = 1 \\
\asymp\quad & A = B \vee B = O - A \\
\asymp\quad & B = (O, A, O) \bowtie \vee B = (O, A, O)\diamond
\end{aligned}
$$

Damit gilt $\|A\|_{OI} = \|B\|_{OI}$ genau dann, wenn das Quadrupel (O, A, O, B) ein Abstandsparallelogramm ist.
Das ist aber gleichbedeutend mit $\overset{a}{O}A{=}\overset{a}{O}B$.
Es seien O, A, B nicht kollinear. Es gilt

$$
\begin{aligned}
& \|A\|_{OI} = \|B\|_{OI} \\
\asymp\quad & \|A\|_{OI}(I) = \|B\|_{OI}(I) \\
\asymp\quad & a^i_{OIA}(A) = a^i_{OIB}(B) \\
\asymp\quad & a_{OIA}(s_{g_{OI}}(A)) = a_{OIB}(s_{g_{OI}}(B)) \\
\asymp\quad & s_{g_{OI}}(A) = a_{OAI} \circ a_{OIB}(s_{g_{OI}}(B)) \\
\asymp\quad & s_{g_{OI}}(A) = a_{OAB}(s_{g_{OI}}(B))
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung gilt aber genau dann, wenn

$$\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{O}}B = O\overset{r}{s_{g_{OI}}}\widehat{(B)O}\overset{r}{s_{g_{OI}}}(A)$$

und

$$\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{A}}B = O\overset{r}{s_{g_{OI}}}(B)\widehat{\overset{r}{s_{g_{OI}}}}(A)\ s_{g_{OI}}(B)$$

gelten.
Die erste Beziehung gilt nach Satz **??**.
Weiter gilt

$$O\overset{r}{s_{g_{OI}}}(B)\widehat{\overset{r}{s_{g_{OI}}}}(A)\ s_{g_{OI}}(B) = \widehat{\overset{r}{A}B\overset{r}{O}}B$$

Also gilt

$$\|A\|_{OI} = \|B\|_{OI} \asymp \widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{A}}B = \widehat{\overset{r}{A}B\overset{r}{O}}B$$

Angenommen, es gilt $\overset{a}{O}A{=}\overset{a}{O}B$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& s_{B\overset{r}{A}B}\left(s_{B\overset{r}{O}B}(O)\right) \\
= \; & s_{B\overset{r}{A}B}(O) \\
= \; & (A,(A,O,B)\bowtie,B)\diamond \\
= \; & (A,O,B)\diamond \\
= \; & s_{B\overset{r}{O}A}((A,O,B)\diamond) \\
= \; & s_{B\overset{r}{O}A}\left(s_{B\overset{r}{A}B}(O)\right)
\end{aligned}
$$

Damit gilt aber

$$\overset{r}{O}\widehat{A\overset{r}{A}}B = \overset{r}{A}\widehat{B\overset{r}{O}}B$$

Sei nun umgekehrt $\overset{r}{O}\widehat{A\overset{r}{A}}B = \overset{r}{A}\widehat{B\overset{r}{O}}B$ vorausgesetzt.
Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& s_{g_{B\overset{r}{A}B}}(O) \\
= \; & s_{g_{B\overset{r}{A}B}}\left(s_{g_{B\overset{r}{O}B}}(O)\right) \\
= \; & s_{g_{B\overset{r}{O}A}}\left(s_{g_{B\overset{r}{A}B}}(O)\right)
\end{aligned}
$$

Damit mu aber

$$s_{g_{B\overset{r}{A}B}}(O) \in B\,\overset{r}{O}A$$

gelten.
Entsprechend lt sich auch

$$s_{g_{A\overset{r}{A}B}}(O) \in A\,\overset{r}{O}B$$

nachweisen.
Damit gilt aber

$$s_{g_{B\overset{r}{A}B}}(O) \in B\,\overset{r}{O}A \cap A\,\overset{r}{O}B$$

Damit ist $s_{g_{B\overset{r}{A}B}}(O)$ der Parallelogrammschlu zu (A,O,B).
Damit gilt $\overset{a}{O}A{=}B\overset{a}{s_{g_{B\overset{r}{A}B}}}(O){=}\overset{a}{O}B$.
□

Satz 9.3 *Es sei* $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ *ein euklidisches Relativ.*

Ein Punkt $O \in \mathcal{P}$ *sei beliebig gewhlt und im Dilatationskrper gelte* $2 \neq 0$.

Dann gilt fr alle Punkte $A \neq B$

$$g_{O(A+B)} \perp g_{O(A-B)} \asymp \|A\|_{OI} = \|B\|_{OI}$$

Beweis zu **??**: Es gilt nach Satz **??**

$g_{O(A+B)} \perp g_{O(A-B)} \asymp l_{A+B}(A-B) = 0$

Weiter gilt

$$\begin{array}{ll} & l_{A+B}(A-B) = 0 \\ \asymp & \dfrac{l_I(A-B)}{l_{A-B}(I)} l_{A+B}(A-B) = 0 \\ \asymp & f(A+B, A-B) = 0 \\ \asymp & f(A,A) + f(B,A) - f(A,B) - f(B,B) = 0 \\ \asymp & f(A,A) = f(B,B) \end{array}$$

Nach Satz **??** heit das aber

$2\|A\|_{OI} = 2\|B\|_{OI}$

Wegen $2 \neq 0$ ist das gleichbedeutend mit

$\|A\|_{OI} = \|B\|_{OI}$

□

Satz 9.4 *Es sei* $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ *ein euklidisches Relativ.*

Zwei Punkte $O \neq I \in \mathcal{P}$ *seien beliebig gewhlt und im Dilatationskrper gelte* $2 \neq 0$.

Dann gilt fr alle Punkte A, B, *die so gewhlt sind, das* O, I, A, B *nicht in einer Ebene liegen*

$$g_{O(A+B)} \perp g_{O(A-B)} \asymp O\overset{a}{A} = O\overset{a}{B}$$

Beweis zu **??**: Zunchst gilt $g_{O(A+B)} \neq g_{O(A-B)}$, da die Punkte O, A, B sonst auf einer Geraden liegen mten.
Angenommen, es gilt $\overset{a}{OA = OB}$.
Dann gilt $s_{g_{O(A+B)}}(A) = B$.
Damit gilt

$$\begin{aligned} s_{g_{O(A+B)}}(A-B) &= s_{g_{O(A+B)}}(A) - s_{g_{O(A+B)}}(B) \\ &= B - A \end{aligned}$$

Damit gilt $s_{g_{O(A+B)}}(A-B) \in g_{O(A-B)}$. Damit gilt $g_{O(A+B)} = g_{O(A+B')}$ und damit $g_{O(A+B)} \perp g_{O(A-B)}$.
Es gelte nun umgekehrt $g_{O(A+B)} \perp g_{O(A-B)}$.
Es gilt $\overset{a}{OA = OB}$ genau dann, wenn $B = s_{g_{O(A+B)}}(A)$ gilt.
Setze $B' := s_{g_{O(A+B)}}(A)$.
Dann gilt $A + B' \in g_{O(A+B)}$. Weiter gilt $g_{O(A+B')} \perp g_{O(A-B')}$.
Damit gilt aber $g_{O(A-B')} = g_{O(A-B)}$.
Damit gibt es Dilatationen $k_1, k_2 \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ mit

$$k_1(A+B) = A + B'$$

$$k_2(A-B) = A - B'$$

Damit gilt aber

$$(k_1 - k_2)B = (2 - k_1 - k_2)A$$

Da die Punkte O, A, B nicht auf einer Geraden liegen, mu damit gelten:

$$k_1 - k_2 = 0$$

$$2 - k_1 - k_2 = 0$$

Damit gilt aber $k_1 = k_2 = 1$ und damit $B = B'$.
□

Satz 9.5 *Es sei $\|\|_{OI}$ eine Dilatationsnorm auf einem euklidischen Relativ $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$. Dann gilt fr alle Punkte $A, B, C, D \in \mathcal{P}$*

$$\overset{a}{AB = CD} \asymp \|A - B\|_{OI} = \|C - D\|_{OI}$$

Beweis zu **??**: Zunchst zeigen wir fr alle $A, B \in \mathcal{P}$

$$\overset{a}{O}A=\overset{a}{O}B \asymp \|A\|_{OI} = \|B\|_{OI}$$

Gilt im zugehrigen Dilatationskrper $2 = 0$, so mu das euklidische Relativ eben sein.Dann gilt die Behauptung nach Satz **??**.
Liegen O, I, A, B in einer Ebene, gilt die Behauptung ebenfalls nach Satz **??**.
Angenommen O, I, A, B liegen nicht in einer Ebene und es gilt $2 \neq 0$. Dann gilt nach Satz **??**

$$g_{O(A+B)} \perp g_{O(A-B)} \asymp \overset{a}{O}A=\overset{a}{O}B$$

und nach Satz **??**

$$g_{O(A+B)} \perp g_{O(A-B)} \asymp \|A\|_{OI} = \|B\|_{OI}$$

Damit gilt hier ebenfalls

$$\overset{a}{O}A=\overset{a}{O}B \asymp \|A\|_{OI} = \|B\|_{OI}$$

Damit gilt aber

$$\begin{aligned} & \|A-B\|_{OI} = \|C-D\|_{OI} \\ \asymp\ & O(\overset{a}{A}-B)=O(\overset{a}{C}-D) \\ \asymp\ & \overset{a}{A}B=\overset{a}{C}D \end{aligned}$$

da Translationen abstandstreue Abbildungen sind.
□

Satz 9.6 *Es sei* $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ *ein euklidisches Relativ, das aus einer euklidischen Geometrie* $(\mathcal{V}, \mathcal{K}, \|\|)$ *konstruiert wurde. (Die euklidische Geometrie erfllt dann die Bedingung* **??**.*).*

O sei der Nullpunkt des Vektorraumes. Ein Punkt $I \neq O \in \mathcal{P}$ *sei beliebig gewhlt. Betrachte die Dilatationsnorm* $\|\|_{OI}$.

q sei der Isomorphismus vom Dilatationskrper $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ *auf* $\mathcal{K}$*, der durch* $q(\alpha) := a$ *mit* $\alpha(I) = aI$ *gegeben ist.*

Dann gilt

$$q(\|A\|_{OI}) = \frac{\|A\|}{\|I\|}$$

Beweis zu **??**: Whle einen Punkt $O \neq I \in \mathcal{P}$.
Es sei ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ beliebig gewhlt mit $A \notin g_{OI}$. Setze

$a := \|A\|$

$b := \|I\|$

$c := \|A - I\|$

$I' := q_{OIA}(I)$

Dann gilt fr ein geeignetes $d \in \mathcal{K}$

$I' = dI$

Wir mssen

$d = \dfrac{a}{b}$

nachweisen. Es gilt fr I'

$\widehat{\overset{r}{O}A\overset{r}{A}}I' = \widehat{\overset{r}{I}A\overset{r}{O}}I$

Das ist gleichbedeutend mit

$\overset{r}{O}\widehat{AO(\overset{r}{I'}}-A) = O(\widehat{\overset{r}{A}-I)}\overset{r}{O}I$

Das ist gleichbedeutend mit

$s_{g_{O(I'-A)}} \circ s_{g_{AO}} = s_{g_{OI}} \circ s_{g_{O(A-I)}}$

Liegt A nicht auf der Geraden durch O und I, so ist diese Bedingung auch hinreichend, um I' eindeutig festzulegen.
Die Drehungen sind bereits dann gleich, wenn sie fr einen Punkt - auer dem Fixpunkt O - gleich sind. Es gengt also, nachzuweisen:

$s_{g_{O(\frac{a}{b}I-A)}} \circ s_{g_{AO}}(A) = s_{g_{OI}} \circ s_{g_{O(A-I)}}(A)$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
& s_{g_{O(A-I)}}(A) \\
= \ & A - I - A + \frac{\|A\| - \|A - I - A\|}{\|A - I\|}(A - I) \\
= \ & -I + \frac{a - b}{c}(A - I)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& s_{g_{OI}}\left(-I+\frac{a-b}{c}(A-I)\right) \\
= \ & I+I-\frac{a-b}{c}(A-I) \\
& +\frac{\left\|-I+\frac{a-b}{c}(A-I)\right\|-\left\|-2I+\frac{a-b}{c}(A-I)\right\|}{\|I\|}I \\
= \ & I+I-\frac{a-b}{c}(A-I)+\frac{-3b+\frac{a-b}{c}(a-b-c)}{b}I \\
= \ & -I-\frac{a-b}{c}(A-I)+\frac{a-b}{bc}(a-b-c)I
\end{aligned}
$$

Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
& s_{g_{O(\frac{a}{b}I-A)}}(A) \\
= \ & \frac{a}{b}I-2A-\frac{\|A\|-\left\|2A-\frac{a}{b}I\right\|}{\left\|\frac{a}{b}I-A\right\|}\left(A-\frac{a}{b}I\right) \\
= \ & \frac{a}{b}I-2A-\frac{a-(4a+\frac{a^2}{b}+2\frac{a}{b}(c-a-b))}{\frac{a^2}{b}+a+\frac{a}{b}(c-a-b)}\left(A-\frac{a}{b}I\right) \\
= \ & \frac{a}{b}I-2A+\frac{3b+a+2(c-a-b)}{a+1+(c-a-b)}\left(A-\frac{a}{b}I\right) \\
= \ & \frac{a}{b}I-2A+\frac{b-a+2c}{b+c-b}\left(A-\frac{a}{b}I\right) \\
= \ & \frac{b-a}{c}\left(A-\frac{a}{b}I\right)-\frac{a}{b}I
\end{aligned}
$$

Es mu also noch nachgewiesen werden:

$$
\begin{aligned}
& -I-\frac{a-b}{c}(A-I)+\frac{a-b}{bc}(a-b-c)I \\
= \ & \frac{b-a}{c}\left(A-\frac{a}{b}I\right)-\frac{a}{b}I
\end{aligned}
$$

Es gilt:

$$
-I-\frac{a-b}{c}(A-I)+\frac{a-b}{bc}(a-b-c)I
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{c}\left(A - \frac{a}{b}I\right) - \frac{a}{b}I \\
\asymp \quad & -1 + \frac{a-b}{c} + \frac{a-b}{bc}(a-b-c) \\
&= -\frac{(b-a)a}{bc} - \frac{a}{b} \\
\asymp \quad & -bc + ab - b^2 + (a-b)(a-b-c) \\
&= -(b-a)a - ac \\
\asymp \quad & -ab + a^2 - ac \\
&= -ba + a^2 - ac
\end{aligned}
$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.
□

Satz 9.7 *Die Klassen der euklidischen Geometrien die die Bedingung* **??** *erfllen und die der euklidischen Relative sind synonym.*

Beweis zu **??**: Es sei $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ ein euklidisches Relativ. Zwei Punkte $O \neq I \in \mathcal{P}$ seien beliebig gewhlt.
$(\mathcal{V}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}}, \|\|)$ sei die zugehrige euklidische Geometrie und $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}', \overset{a}{\mathcal{R}}')$ das zu dieser Geometrie gebildete euklidische Relativ. (Das Relativ kann gebildet werden, da die Geometrie nach Satz **??** die Zusatzbedingung erfllt).
Dann gilt

$$
\begin{aligned}
C \ \overset{a}{AB} \ D \quad &\asymp \quad \|A-B\|_{OI} = \|C-D\|_{OI} \\
&\asymp \quad C \ \overset{a}{AB}' \ D
\end{aligned}
$$

und damit $\overset{a}{\mathcal{R}} = \overset{a}{\mathcal{R}}'$.
Sei nun $(\mathcal{V}, \mathcal{K}, \|\|)$ eine euklidische Geometrie, die die Bedingung **??** erfllt und $(\mathcal{P}, \overset{r}{\mathcal{R}}, \overset{a}{\mathcal{R}})$ das zugehrige euklidische Relativ. O sei der Nullpunkt des Vektorraumes. Ein Punkt $O \neq I \in \mathcal{P}$ sei beliebig gewhlt. $(\mathcal{P}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}}, \|\|_{OI})$ ist dann ebenfalls eine euklidische Geometrie.
Es mu nachgewiesen werden, da $(\mathcal{P}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}}, \|\|_{OI})$ und $(\mathcal{V}, \mathcal{K}, \|\|)$ isomorph sind.
q sei der Isomorphismus vom Dilatationskrper $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ auf $\mathcal{K}$, der durch $q(\alpha) := a$ mit $\alpha(I) = aI$ gegeben ist.
Dann gilt fr alle $A \in \mathcal{P}$ und alle Dilatationen $\alpha \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$

$\alpha(A) = q(\alpha)A$

und

$$q(\|A\|_{OI}) = \frac{1}{\|I\|}\,\|A\|$$

Damit sind die euklidischen Geometrien isomorph.
Die Klassen der euklidischen Relative und die der euklidischen Geometrien, die die Bedingung **??** erfllen, sind also synonym.
□

Literatur

[1] Schrder,Eberhardt M .
Geometrie euklidischer Ebenen
Mathematische Grundlegung der Schulbuchgeometrie
Ferdinand Schningh,Paderborn

[2] Schrder,Eberhardt M .
Vorlesungen ber Geometrie Bd.1-3
BI-Wissenschaftsverlag Mannheim Wien Zrich

[3] Karzel,Helmut
Zur Begrndung euklidischer Rume
Mitt . Math . Ges . i . Hbg .(1985) 355-368

[4] Arnold,H . J .
Vorlesungen zur geometrischen Relationenalgebra 1-3
Universitt G . H . Duisburg 1986 - 1988

[5] J .Hientzsch
Eine Untersuchung affiner Graphen als Vereinfachung affiner Geometrien
Diplomarbeit Duisburg 1990