Eine Untersuchung über affine Graphen als Vereinfachung affiner Geometrien

Diplomarbeit im Rahmen des Studienganges Mathematik D II
an der
Universität Gesamthochschule Duisburg
von

Jessica Hientzsch

Duisburg 16. März 2024

betreut von
Prof. Dr. H. J. Arnold

Inhaltsverzeichnis

I Einleitung

Die vorliegende Arbeit soll einen Ansatz zu einer geometrischen Betrachtung affiner Graphen bieten.

Die Arbeit stützt sich auf einen Artikel von S.Comer und eine Vorlesung von H.J.Arnold.

Comer untersucht in seinem Artikel [3] unter verschiedenen Aspekten den Begriff der Multigruppe.Unter anderem betrachtet er sogenannte "color schemes",eine spezielle Art "kantengefärbter" Graphen,die Multigruppen erzeugen können.Diese color schemes werden mit Begriffen der Relationenalgebra beschrieben.

Arnold entwickelt in seinem Artikel [1] und seiner Vorlesung zur geometrischen Relationenalgebra [2] ebenfalls ein relationenalgebraisches System,die "affinen Relative". Dieses System dient der relationenalgebraischen Beschreibung affiner Geometrien.Verschiedene geometrische Sätze und Zusammenhänge—die Sätze von Desargues,Unterräume affiner Geometrien,der Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Geometrien—werden in dem Artikel und in der Vorlesung von Arnold mit Hilfe der affinen Relative relationenalgebraisch beschrieben und untersucht.

Die Definition der "color schemes" nach Comer unterscheidet sich von der der affinen Relative nur in zwei Punkten:

1. die Relationen der "color schemes" müssen nicht symmetrisch sein
2. die Relationen der "color schemes" müssen nicht $a \circ a \subset a \cup O$ erfüllen.

Der enge Zusammenhang zwischen affinen Relativen und color schemes legt eine geometrisch orientierte Untersuchung der color schemes nahe. Inwieweit eine solche Interpretation durchgehalten werden kann und welche Ergebnisse aus diesem Blickwinkel erzielt werden können, ist das Thema der vorliegenden Arbeit.

Zur Vereinfachung der Betrachtung und zur weiteren Annäherung an geometrische Verhältnisse werden nur symmetrische color schemes untersucht.

Die in dieser Arbeit untersuchten affinen Graphen werden mit Hilfe geometrischer Vorstellungen definiert, sind aber synonym zu den symmetrischen color schemes nach Comer.

Über weite Strecken hält sich die Arbeit eng an die Vorlesung über geometrische Relationenalgebra nach Arnold.Die dortigen Vorgehensweisen und Ergebnisse werden soweit wie möglich von affinen Geometrien auf affine Graphen verallgemeinert.

Insbesondere das 2. Kapitel und das Unterkapitel 3.I beruhen auf solchen Verallgemeinerungen.

Im ersten Teil der Arbeit wird der Begriff des *graphischen Relativs*— der,geringfügig anders formuliert,dem Begriff des symmetrischen color schemes gleichwertig ist—und der Begriff des *affinen Graphen* eingeführt.Die Klasse der graphischen Relative und die Klasse der affinen Graphen sind synonym.Der Begriff des graphischen Relativs ist mit Mitteln der Relationenalgebra formuliert.Der Begriff des affinen Graphen ist geometrisch aufgebaut.

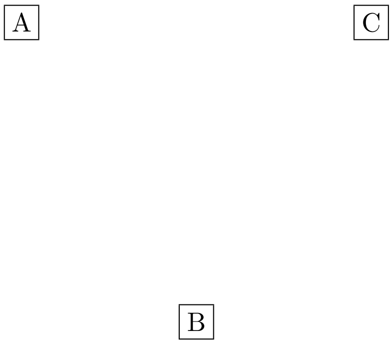
Es werden einige Hilfssätze über affine Graphen und graphische Relative entwickelt. Besonders wird dabei auf abgeschlossene Relationen auf graphischen

Relativen und auf Parallelogramme auf affinen Graphen eingegangen.Beide Begriffe werden im Verlauf der Arbeit benötigt.

Schlie×lich wird der Zusammenhang zwischen affinen Graphen und affinen Geometrien genauer untersucht. Der entscheidende Unterschied zwischen beiden ist das Vorhandensein von Geraden auf einer affinen Geometrie:

Liegen bei einer affinen Geometrie die Punkte A, B und die Punkte B, C auf der gleichen Geraden,so müssen auch A und C auf dieser Geraden liegen.

Sind dagegen auf einem affinen Graphen die Strecken (A, B) und (B, C) parallel,so mu× die Strecke (A, C) deswegen noch nicht parallel zu ihnen liegen.



Als Beispiel für die Übertragbarkeit eines geometrischen Sachverhaltes auf affine Graphen wird im zweiten Teil der Arbeit versucht,den kleinen affinen Satz von Desargues für affine Geometrien auf den Fall der affinen Graphen zu erweitern.

In der Vorlesung zur geometrischen Algebra wird gezeigt, da× der kleine affine Satz von Desargues auf affinen Geometrien genau dann erfüllt ist,wenn sich diese affinen Geometrien von desargueschen Gruppenpartitionen erzeugen lassen.Um das zu zeigen,werden die Translationen auf einer affinen Geometrie,die den kleinen affinen Satz von Desargues erfüllt,zu einer desargueschen Gruppenpartition erweitert,die ihrerseits eine isomorphe Geometrie erzeugt.

Analog zu diesem Vorgehen werden in dieser Arbeit zunächst schwach desarguesche Gruppenpartitionen definiert.

Anschlie×end wird eine Erweiterung des kleinen affinen Satzes von Desargues so gegeben, da× schwach desarguesche Gruppenpartitionen affine Graphen erzeugen, die diese Erweiterung erfüllen.

Es wird der Begriff der Translation für solche affinen Graphen definiert, die den kleinen affinen Satz von Desargues erfüllen(allgemein ist der Begriff einer Translation auf einem affinen Graphen in dieser Arbeit *nicht* definiert).

Schlie×lich werden die Translationen zu einer schwach affinen Gruppenpartition erweitert und es wird gezeigt,da× schwach desarguesche Gruppenpartitionen und desarguesche affine Graphen zueinander synonym sind.

Im dritten Teil der Arbeit werden zunächst Unterräume auf affinen Graphen eingeführt und untersucht.Der Begriff des Unterraumes ist dabei analog gebildet zum Unterraumbegriff auf affinen Geometrien.

Dann werden die zu den affinen Graphen gehörigen symmetrischen Multigruppen eingeführt. Die zur Klasse der symmetrischen Multigruppen synonyme Klasse der *Multigruppenrelationen* wird definiert.

Mit Hilfe der Multigruppenrelation,die zu einem graphischen Relativ gehört,werden schlie×lich weitere,gegenüber den Unterräumen allgemeinere,Unterstrukturen des graphischen Relativs—die Vereinfachungen—definiert und untersucht.

Es wird gezeigt,da× die Vereinfachungen eines graphischen Relativs einen vollständigen Verband bilden.

II Hilfsmittel

Es werden zunächst einige Definititionen und Sätze aus der Algebra, insbesondere aus der Relationenalgebra, und aus der Verbandstheorie aufgelistet, die in der folgenden Arbeit verwendet werden oder auf die Bezug genommen wird.

II_ I Relationenalgebra

Def. II.1 *Eine Teilmenge* $r \subset \mathcal{P}^n$ *auf einer Grundmenge* $\mathcal{P}$ *heižt eine* n-stellige Relation auf $\mathcal{P}$.

Def. II.2 *Ist* $r \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ *eine zweistellige Relation auf* $\mathcal{P}$*,so sind für alle Elemente* $A, B \in \mathcal{P}$ *folgende Schreibweisen gleichwertig:*

$$A\,r\,B :\!\asymp (A, B) \in r$$

Aužerdem kann für alle Elemente $A \in \mathcal{P}$ $A\,r$ *folgendermažen definiert werden:*

$$A\,r := \{B \in \mathcal{P} \mid A\,r\,B\}$$

Def. II.3 $r_1, r_2 \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ *seien zwei zweistellige Relationen auf* $\mathcal{P}$*.Dann wird durch*

$$r_1 \circ r_2 := \{(A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mid \bigvee_{C \in \mathcal{P}} A\,r_1\,C \wedge C\,r_2\,B\}$$

ein Relationenprodukt auf der Menge der zweistelligen Relationen auf $\mathcal{P}$ *definiert.*

Bem. II.3* *Das Relationenprodukt ist assoziativ.*

Def. II.4 $r \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ *sei eine zweistellige Relation auf* $\mathcal{P}$*.Dann gilt:*

I. r *heižt* linkstotal*,wenn gilt:* $\bigwedge_{A \in \mathcal{P}} \bigvee_{B \in \mathcal{P}} A\,r\,B$

II. r *heižt* symmetrisch*,wenn gilt:* $\bigwedge_{A,B \in \mathcal{P}} A\,r\,B \Longleftrightarrow B\,r\,A$

III. r *heižt* transitiv*,wenn gilt:* $r \circ r \subset r$

Def. II.5 *Die zweistellige Relation*

$$O := \{(A, A) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mid A \in \mathcal{P}\}$$

auf einer Grundmenge $\mathcal{P}$ *wird als* Gleichheitsrelation auf $\mathcal{P}$ *bezeichnet.*

Def. II.6 *Eine zweistellige Relation* r *auf einer Grundmenge* $\mathcal{P}$ *heižt* Žquivalenzrelation*,wenn gilt:*

I. $O \subset r$

II. *r ist symmetrisch.*

III. *r ist transitiv.*

Def. II.7 *Eine Menge $K \subset \mathrm{Pot}\mathcal{P}$ von Teilmengen auf einer Grundmenge $\mathcal{P}$ heižt eine* Klasseneinteilung auf $\mathcal{P}$*,wenn gilt:*

I. $\emptyset \notin K$

II. $\bigcup_{k \in K} k = \mathcal{P}$

III. $\bigwedge_{k_1 \neq k_2 \in K} k_1 \cap k_2 = \emptyset$

Die Menge aller Klasseneinteilungen auf einer Grundmenge $\mathcal{P}$ wird im folgenden mit $\mathcal{P}^\kappa$ bezeichnet.

Bem. II.7* *Ist K eine Klasseneinteilung auf $\mathcal{P}$,so gilt:*

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{P}} \bigvee_{k \in K}^{1} A \in k$$

Diese zu A eindeutig gegebene Klasse werde mit $\langle A \rangle_K$ bezeichnet.

Satz II.7** *Es sei $K = \{k_A \subset \mathcal{P} \mid A \in \mathcal{P}\}$ eine Menge von Teilmengen auf einer Grundmenge $\mathcal{P}$. Dabei seien die k_A beliebige,von A abhängig definierte Mengen. Gilt dann*

I. $\bigwedge_{A \in \mathcal{P}} A \in k_A$

II. $\bigwedge_{A,B \in \mathcal{P}} B \in k_A \Longrightarrow k_B = k_A$

so ist K eine Klasseneinteilung auf $\mathcal{P}$ und es gilt:

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{P}} k_A = \langle A \rangle_K$$

Satz II.8 *Die Äquivalenzrelationen auf einer Menge $\mathcal{P}$ und die Klasseneinteilungen auf dieser Menge sind synonym zueinander.*
Sie können durch folgende Verfahren aufeinander bezogen werden:

II.8.1 *Ist r eine Žquivalenzrelation auf $\mathcal{P}$,so wird durch*

$$K := \{\{B \in \mathcal{P} \mid A \, r \, B\} \in \mathrm{Pot}\mathcal{P} \mid A \in \mathcal{P}\}$$

eine Klasseneinteilung auf $\mathcal{P}$ definiert.

II.8.2 *Ist K eine Klasseneinteilung auf $\mathcal{P}$,so wird durch*

$$r := \{(A, B) \in \mathcal{P}^2 \mid B \in \langle A \rangle_K\}$$

eine Žquivalenzrelation auf $\mathcal{P}$ definiert.

II_ II Verbandstheorie

Def. II.9 $(\mathcal{P}, \leq)$ *heißt eine Halbordnung, wenn gegeben sind:*

I. *eine Menge* $\mathcal{P} = \{A, B, \ldots\} \neq \emptyset$

II. *eine zweistellige Relation* $\leq$ *auf* $\mathcal{P}$

und wenn gilt:

III. $\bigwedge\limits_{A \in \mathcal{P}} A \leq A$

IV. $\bigwedge\limits_{A,B \in \mathcal{P}} A \leq B \wedge B \leq A \Longrightarrow A = B$

V. $\bigwedge\limits_{A,B,C \in \mathcal{P}} A \leq B \wedge B \leq C \Longrightarrow A \leq C$

Def. II.10 *Es seien ein Element* $A \in \mathcal{P}$ *und eine Teilmenge* $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}$ *auf einer Grundmenge* $\mathcal{P}$ *gegeben.*

Dann heißt A obere Schranke von $\mathcal{U}$*,wenn gilt:* $\bigwedge\limits_{B \in \mathcal{U}} B \leq A$.

Man schreibt dann auch $\mathcal{U} \leq A$.

A *heißt* untere Schranke von $\mathcal{U}$*,wenn gilt:* $\bigwedge\limits_{B \in \mathcal{U}} A \leq B$.

Man schreibt dann auch $A \leq \mathcal{U}$.

Ist A obere Schranke von U, so heißt A Supremum von U ($A = \sup \mathcal{U}$*),wenn gilt:* $\bigwedge\limits_{B \in \mathcal{P}} \mathcal{U} \leq B \Longrightarrow A \leq B$

Ist A untere Schranke von U, so heißt A Infimum von U ($A = \inf \mathcal{U}$*),wenn gilt:* $\bigwedge\limits_{B \in \mathcal{P}} B \leq \mathcal{U} \Longrightarrow B \leq A$

Def. II.11 *Eine Halbordnung* $(\mathcal{P}, \leq)$ *heißt ein* Verband*,wenn zu allen Elementen* $A, B \in \mathcal{P}$ *das Supremum* $\sup\{A, B\}$ *und das Infimum* $\inf\{A, B\}$ *existieren.*

Def. II.12 $(\mathcal{P}, \vee, \wedge)$ *heižt eine* Verbandsalgebra*,wenn gegeben sind:*

I. *eine Menge* $\mathcal{P} = \{A, B, \ldots\} \neq \emptyset$

II. *zwei binäre Operationen*

$$\vee := \left\{ \begin{array}{ccccc} \mathcal{P} & \times & \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ A & & B & & A \vee B \end{array} \right.$$

und

$$\wedge := \left\{ \begin{array}{ccccc} \mathcal{P} & \times & \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ A & & B & & A \wedge B \end{array} \right.$$

und wenn gilt:

III. $\bigwedge\limits_{A\in\mathcal{P}} A\vee A=A\ ,\ A\wedge A=A$

IV. $\bigwedge\limits_{A,B\in\mathcal{P}} A\vee B=B\vee A\ ,\ A\wedge B=B\wedge A$

V. $\bigwedge\limits_{A,B,C\in\mathcal{P}} (A\vee B)\vee C=A\vee(B\vee C)\ ,\ (A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$

VI. $\bigwedge\limits_{A,B\in\mathcal{P}} A\wedge(A\vee B)=A\ ,\ A\vee(A\wedge B)=A$

Satz II.13 *Die Klasse der Verbände und die Klasse der Verbandsalgebren sind bezüglich folgender Verfahren zueinander synonym:*

II.13.1 *Jeder Verband* $(\mathcal{P},\leq)$ *definiert mittels*

$$\bigwedge_{A,B\in\mathcal{P}} A\vee B:=\sup\{A,B\}\ ,\ A\wedge B:=\inf\{A,B\}$$

eine Verbandsalgebra $(\mathcal{P},\vee,\wedge)$.

II.13.2 *Jede Verbandsalgebra* $(\mathcal{P},\vee,\wedge)$ *definiert mittels*

$$\bigwedge_{A,B\in\mathcal{P}} A\leq B:\Longleftrightarrow A=A\wedge B$$

einen Verband $(\mathcal{P},\leq)$.

Def. II.14 *Ein Verband* $(\mathcal{P},\leq)$ *heißt* vollständig,*wenn zu jeder Teilmenge* $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}$ *das Infimum* $\inf\mathcal{P}'$ *und das Supremum* $\sup\mathcal{P}'$ *existieren.*

Satz II.15 *Eine Halbordnung* $(\mathcal{P},\leq)$,*die ein gr”žtes Element besitzt,ist bereits dann ein vollständiger Verband,wenn zu jeder Teilmenge* $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}$ *das Infimum* $\inf\mathcal{P}'$ *existiert.*

Def. II.16 *Auf einem Verband* $(\mathcal{P},\leq)$ *bildet eine Teilmenge* $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}$ *bezüglich* $\leq$ *stets eine Halbordnung* $(\mathcal{P}',\leq)$. *Eine solche Halbordnung heižt ein* Teilbund von $(\mathcal{P},\leq)$,*wenn sie selbst ein Verband ist.*

Sind für alle Elemente $A,B\in\mathcal{P}$ *die Infima von* $\{A,B\}$ *auf* $(\mathcal{P},\leq)$ *und* $(\mathcal{P}',\leq)$ *gleich,so heižt* $(\mathcal{P}',\leq)$ *ein* Infimums-Teilbund von $(\mathcal{P},\leq)$.

Sind für alle Elemente $A,B\in\mathcal{P}$ *die Infima und Suprema von* $\{A,B\}$ *auf* $(\mathcal{P},\leq)$ *und* $(\mathcal{P}',\leq)$ *gleich,so heižt* $(\mathcal{P}',\leq)$ *ein* Teilverband von $(\mathcal{P},\leq)$.

Schliežlich wird im Verlauf der Arbeit der folgende Satz ben”tigt,der dem §46 über Žquivalenzrelationen aus [4] sinngemäß entnommen wurde:

Satz II.17 *Ist $\mathcal{P} \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und ist $\mathcal{P}^\kappa$ die Menge der Klasseneinteilungen auf $\mathcal{P}$ so ist $(\mathcal{P}^\kappa, \leq)$ mit*

$$\bigwedge_{K_1, K_2 \in \mathcal{P}^\kappa} K_1 \leq K_2 :\Longleftrightarrow \bigwedge_{A \in \mathcal{P}} \langle A \rangle_{K_2} \subset \langle A \rangle_{K_1}$$

ein vollständiger Verband mit $\{\mathcal{P}\}$ als kleinstem und $\{\{A\} \in \mathrm{Pot}\mathcal{P} \mid A \in \mathcal{P}\}$ als gr"žtem Element.

Dabei gilt für eine beliebige Teilmenge $\kappa' \subset \mathcal{P}^\kappa$ von Klasseneinteilungen und für jedes Element $A \in \mathcal{P}$:

$$\langle A \rangle_{\sup \kappa'} = \bigcap_{K \in \kappa'} \langle A \rangle_K$$

Ferner gilt für ein Element $B \in \mathcal{P}$ genau dann $B \in \langle A \rangle_{\inf \kappa'}$,wenn es eine endliche Menge $B = A_0, A_1 \ldots A_{n-1}, A_n = A$ von Elementen aus $\mathcal{P}$ gibt,für die für $i = 1 \ldots n$ gilt:

$$\bigvee_{K_i \in \kappa'} A_{i-1} \in \langle A_i \rangle_{K_i}$$

1 Einführung affiner Graphen

1_ I Affine Graphen und graphische Relative

Der Begriff des affinen Graphen wird folgenderma×en definiert:

Def. 1.1 $(\mathcal{P}, \parallel)$ *hei×e ein* affiner Graph*, wenn gegeben sind:*

I. *eine Menge* $\mathcal{P} = \{A, B, \ldots\} \neq \emptyset$*, deren Elemente* Punkte *hei×en sollen*

II. *eine Äquivalenzrelation* $\parallel$ *auf* $(\mathcal{P} \times \mathcal{P}) \backslash O$ *(*O *bezeichne die Gleichheitsrelation)*

und wenn gilt:

III. $\bigwedge\limits_{A \neq B \in \mathcal{P}} (A, B) \parallel (B, A)$

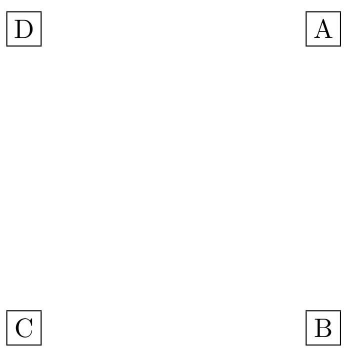
IV. $\bigwedge\limits_{A \neq B \in \mathcal{P}} \bigwedge\limits_{C \in \mathcal{P}} \bigvee\limits_{D \in \mathcal{P}} (A, B) \parallel (C, D)$

V. (Dreiecksbedingung) *Sind* $A, B, C \in \mathcal{P}$ *paarweise verschiedene Punkte, und sind* $A', B' \in \mathcal{P}$ *Punkte mit* $A' \neq B'$*,so gilt:*

$$(A, B) \parallel (A', B') \succ \bigvee_{C' \in \mathcal{P}} (A, C) \parallel (A', C') \wedge (C, B) \parallel (C', B')$$

Die Elemente von $(\mathcal{P} \times \mathcal{P}) \backslash O$ *werden dabei als* Strecken *bezeichnet.Zwei Strecken* (A, B) *und* (C, D) *mit* $(A, B) \parallel (C, D)$ *sollen* parallel *hei×en.*

Ein affiner Graph $(\mathcal{P}, \parallel)$ auf einer endlichen Menge $\mathcal{P}$ von Punkten kann dargestellt werden,indem ein vollständiger Graph mit den Punkten aus $\mathcal{P}$ als Eckpunkten gezeichnet wird,auf dem jeweils parallele Strecken gleich eingefärbt werden.



Um affine Graphen insbesondere relationenalgebraisch untersuchen zu können, wird au×erdem der Begriff des graphischen Relativs eingeführt:

Def. 1.2 $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ *hei×e ein* graphisches Relativ*, wenn gegeben sind:*

I. *eine Menge* $\mathcal{P} = \{A, B, \ldots\} \neq \emptyset$*, deren Elemente Punkte hei×en sollen*

II. *eine Menge* $\mathcal{R} = \{a, b, \ldots\}$ *nicht leerer, symmetrischer,zweistelliger Relationen auf* $\mathcal{P}$ *mit* $O \in \mathcal{R}$

und wenn gilt:

III. $\displaystyle\bigwedge_{A,C\in\mathcal{P}} \overset{1}{\bigvee_{b\in\mathcal{R}}} A\,b\,C \qquad b =: AC$

IV. $\displaystyle\bigwedge_{A,B,C\in\mathcal{P}} AB \subset AC \circ CB$

Bem. 1.2* *Damit sind alle Relationen in* $\mathcal{R}$ *linkstotal.*

Beweis zu **1.2*** : Wegen $O \in \mathcal{R}$ gilt für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
O = AA \subset AB \circ BA \quad &\succ \quad \bigwedge_{C\in\mathcal{P}} C\,(AB \circ BA)\,C \\
&\succ \quad \bigwedge_{C\in\mathcal{P}} \bigvee_{D\in\mathcal{P}} C\,AB\,D \wedge D\,AB\,C \\
&\succ \quad \bigwedge_{C\in\mathcal{P}} \bigvee_{D\in\mathcal{P}} C\,AB\,D
\end{aligned}$$

□

Satz 1.3 *Die Klasse der affinen Graphen kann auf die Klasse der graphischen Relative durch die folgenden Verfahren* α,γ *synonym bezogen werden:*

1.3.1 *Zu jedem graphischen Relativ* $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ *definiert das Verfahren* γ *mit*

$$(\mathcal{P}, \mathcal{R})\gamma = (\mathcal{P}, \|)$$

einen affinen Graphen.
Dabei ist $\|$ *definiert durch:*

$$\bigwedge_{A\neq B\in\mathcal{P}} \bigwedge_{C,D\in\mathcal{P}} (A, B) \parallel (C, D) :\Longleftrightarrow AB = CD$$

1.3.2 *Zu jedem affinen Graphen* $(\mathcal{P}, \|)$ *definiert das Verfahren* α *mit*

$$(\mathcal{P}, \|)\alpha = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$$

ein graphisches Relativ.

Dabei ist $\mathcal{R}$ gegeben durch:

$$\mathcal{R} := \{AB \subset \mathcal{P}^2 \mid A, B \in \mathcal{P}\}$$

AB ist dabei für beliebige Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ definiert durch:

$$AB := \begin{cases} \{(C,D) \in \mathcal{P}^2 \mid (A,B) \parallel (C,D)\} & \text{falls } A \neq B \\ O & \text{falls } A = B \end{cases}$$

Beweis zu **1.3.1**:

$\parallel$ ist eine Äquivalenzrelation,da "=" eine Äquivalenzrelation ist.

$\parallel$ operiert nur auf $(\mathcal{P} \times \mathcal{P})\backslash\{O\}$,da für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B$ und für beliebige Punkte $C, D \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\begin{aligned} AB = CD &\succ O \neq AB \wedge C\,AB\,D && \text{da } A \neq B \text{ gilt} \\ &\succ O \cap AB = \emptyset \wedge C\,AB\,D \\ &\succ C \neq D \end{aligned}$$

1.1_ III gilt,da $\mathcal{R}$ aus symmetrischen Relationen besteht und damit gilt:

$$\bigwedge_{A \neq B \in \mathcal{P}} AB = BA \succ \bigwedge_{A \neq B \in \mathcal{P}} (A,B) \parallel (B,A)$$

Zu 1.1_ IV:Für alle Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ und beliebige Punkte $C \in \mathcal{P}$ gibt es einen Punkt $D \in \mathcal{P}$ mit $C\,AB\,D$, da die Relation AB linkstotal ist. Damit gilt:

$C\,AB\,D \succ AB = CD \succ (A,B) \parallel (C,D)$

Es ist also ein passender Punkt $D \in \mathcal{P}$ gefunden,der 1.1_ IV erfüllt.

Zu 1.1_ V: Es seien Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ und Punkte $A', B' \in \mathcal{P}$ entsprechend den Voraussetzungen von 1.1_ V gegeben.Dann gilt:

$$\begin{aligned} & (A,B) \parallel (A',B') \\ \succ\ & A'\,AB\,B' \\ \succ\ & A'\,AC \circ CB\,B' && \text{nach 1.2\_ IV} \\ \succ\ & \bigvee_{C' \in \mathcal{P}} A'\,AC\,C' \wedge C'\,CB\,B' \\ \succ\ & \bigvee_{C' \in \mathcal{P}} (A,C) \parallel (A',C') \wedge (C,B) \parallel (C',B') && \text{da } A \neq C \neq B \text{ gilt} \end{aligned}$$

Damit ist $(\mathcal{P}, \mathcal{R})\gamma$ ein affiner Graph.

□

Beweis zu **1.3.2**: Es seien Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben. Gilt dann $A \neq B$,so gilt $(A, B) \parallel (A, B)$. Damit gilt $A\,AB\,B$.Für $A = B$ gilt $AA = O \neq \emptyset$.Damit sind alle Relationen in $\mathcal{R}$ nicht leer.

Da O symmetrisch ist, ist AB symmetrisch für $A = B$. Für $A \neq B$ ist AB symmetrisch,da für beliebige Punkte $C, D \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\begin{array}{lcll} C\,AB\,D & \succ & (A,B) \parallel (C,D) \parallel (D,C) & \text{nach 1.1\_ III} \\ & \succ & (A,B) \parallel (D,C) & \parallel \text{ ist transitiv} \\ & \succ & D\,AB\,C & \end{array}$$

Damit ist $\mathcal{R}$ eine Menge nicht leerer,symmetrischer Relationen. Ferner ist für jeden Punkt $A \in \mathcal{P}$ $O = AA \in \mathcal{R}$ nach der Definition von α und es gilt $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Damit gilt $O \in \mathcal{R}$.

Es müssen noch die Bedingungen 1.2_ III und 1.2_ IV nachgewiesen werden.

Zu 1.2_ III: Es seien Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.

Für $A = B$ gilt: $A\,O\,A \succ A\,AA\,A$.

Die Existenz einer Relation $a \in \mathcal{R}$ mit $A\,a\,B$ ist damit gegeben.

Es sei nun eine Relation $CD \in \mathcal{R}$ gegeben mit $A\,CD\,A$. Wäre dann $C \neq D$,so mü×te gelten:

$$A\,CD\,B \succ (A,B) \parallel (C,D) \succ A \neq B$$

Damit mu× $C = D$ gelten.Es gilt also $CD = O = AB$. Damit ist die Eindeutigkeit von AB für $A = B$ nachgewiesen.

Im folgenden sei $A \neq B$ vorausgesetzt.

Da $(A, B) \parallel (A, B) > A\,AB\,B$ gilt,existiert eine Relation $a = AB \in \mathcal{R}$ mit $A\,a\,B$.

Ferner gilt für beliebige Relationen $CD \in \mathcal{R}$ $(C, D \in \mathcal{P})$:

$$\begin{array}{lcl} A\,CD\,B & \succ & (A,B) \parallel (C,D) \\ & \succ & \bigwedge\limits_{E,F \in \mathcal{P}} (E,F) \parallel (A,B) \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail (E,F) \parallel (C,D) \\ & \succ & \bigwedge\limits_{E,F \in \mathcal{P}} E\,CD\,F \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail E\,AB\,F \\ & \succ & AB = CD \end{array}$$

Damit ist die Eindeutigkeit von AB auch für $A \neq B$ nachgewiesen.

Zu 1.2_ IV: Es seien Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.

Für $A = C$ gilt dann $AB \subset O \circ AB = AC \circ CB$.

Für $B = C$ gilt entsprechend $AB \subset AB \circ O = AC \circ CB$.

Gilt $A = B$ und $A \neq C$,so gilt nach 1.1_ IV:

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{D\in\mathcal{P}} \bigvee_{E\in\mathcal{P}} (D,E) \parallel (A,C) \wedge (E,D) \parallel (C,A) \quad &\succ \quad \bigwedge_{D\in\mathcal{P}} \bigvee_{E\in\mathcal{P}} D\,AC\,E \wedge E\,AC\,D \\
&\succ \quad \bigwedge_{D\in\mathcal{P}} D\,AC \circ CA\,D \\
&\succ \quad O \subset AC \circ CA \\
&\succ \quad AB \subset AC \circ CB
\end{aligned}$$

Sind A, B und C paarweise verschieden, so gilt nach 1.1_ V für beliebige Punkte $A', B' \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
A'\,AB\,B' \quad &\succ \quad (A', B') \parallel (A, B) \\
&\succ \quad \bigvee_{C'\in\mathcal{P}} (A', C') \parallel (A, C) \wedge (C', B') \parallel (C, B) \\
&\succ \quad \bigvee_{C'\in\mathcal{P}} A'\,AC\,C' \wedge C'\,CB\,B' \\
&\succ \quad A'\,AC \circ CB\,B'
\end{aligned}$$

Damit gilt $AB \subset AC \circ CB$.

Damit ist 1.2_ IV für alle Fälle nachgewiesen.

$(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ ist also ein graphisches Relativ.

□

Beweis zu **1.3**: Es mu× noch gezeigt werden, da× die Verfahren α und γ einander umkehren.

Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{R})\gamma\alpha = (\mathcal{P}, \parallel)\alpha = (\mathcal{P}, \mathcal{R}')$.

Dabei sei $\mathcal{R}' = \{AB' \mid A, B \in \mathcal{P}\}$.

Dann gilt für beliebige Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ und alle Punkte $C, D \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
C\,AB'\,D \quad &\rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail \quad \begin{cases} (C,D) \parallel (A,B) & \text{für } A \neq B \\ \quad C = D & \text{für } A = B \end{cases} \\
&\rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail \quad \begin{cases} C\,AB\,D & \text{für } A \neq B \\ \;C\,O\,D & \text{für } A = B \end{cases} \\
&\rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail \quad C\,AB\,D
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\bigwedge_{A,B\in\mathcal{P}} AB' = AB$$

Es gilt also $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$.Damit ist gezeigt,da× $(\mathcal{P},\mathcal{R}) = (\mathcal{P},\mathcal{R})\gamma\alpha$ gilt.

Sei umgekehrt $(\mathcal{P},\|)\alpha\gamma = (\mathcal{P},\mathcal{R})\gamma = (\mathcal{P},\|_n)$.

Dann gilt für alle Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ und für alle Punkte $C \neq D \in \mathcal{P}$:

$$(A,B)\,\|_n\,(C,D) \;\succ\!\!\!\prec\; AB = CD \;\succ\!\!\!\prec\; (A,B)\,\|\,(C,D)$$

Damit gilt $\| = \|_n$ .Damit gilt $(\mathcal{P},\|)\alpha\gamma = (\mathcal{P},\|)$.

Damit kehren die Verfahren α und γ einander um.

□

Man sieht,da× der Zusammenhang zwischen affinen Graphen und graphischen Relativen sehr eng ist.Tatsächlich können die Relationen des graphischen Relativs—bis auf die Gleichheitsrelation— als die Klasseneinteilungen der Äquivalenzrelation $\|$ des zugehörigen affinen Graphen verstanden werden.

1_ II Sätze über affine Graphen und graphische Relative

Im folgenden werden einige Sätze über affine Graphen und graphische Relative zusammengefasst,die im Verlauf der Arbeit benötigt werden.

Zunächst werden Dreiecke auf graphischen Relativen betrachtet.

Satz 1.4 *Sei $(\mathcal{P},\mathcal{R})$ ein graphisches Relativ. Es seien Relationen $a,b,c \in \mathcal{R}$ beliebig gegeben. Dann sind folgende Zeilen äquivalent:*

I. $\bigvee\limits_{A,B,C\in\mathcal{P}} AB = a \wedge AC = b \wedge CB = c$

II. $a \subset b \circ c$

III. $\bigwedge\limits_{A\in\mathcal{P}} \bigvee\limits_{B,C\in\mathcal{P}} AB = a \wedge AC = b \wedge CB = c$

Beweis zu **1.4**:

1.4_ I $\succ$ 1.4_ II gilt, da $AB \subset AC \circ CB$ für alle Punkte $A,B,C \in \mathcal{P}$ gilt.

Zu 1.4_ II $\succ$ 1.4_ III:Es sei ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.

Wegen der Linkstotalität aller Relationen gibt es einen Punkt $B \in \mathcal{P}$ mit $AB = a$.

Damit gilt $A\,b \circ c\,B$.

Damit gibt es einen Punkt $C \in \mathcal{P}$ mit $AC = b$ und $CB = c$.

1.4_ III $\succ$ 1.4_ I gilt,da $\mathcal{P} \neq \emptyset$ ist und damit stets ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ existiert.

□

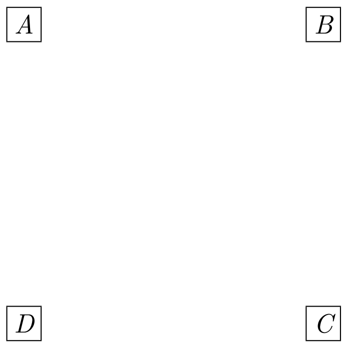
1_ II.1 Parallelogramme auf affinen Graphen

Als nächstes wird der Begriff des Parallelogrammes auf affinen Graphen untersucht.

Def. 1.5 *Es sei $(\mathcal{P}, \|)$ ein affiner Graph. Ein Tripel von Punkten $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$ mit $A \neq B$ und $B \neq C$ sei gegeben. Dann heiže ein Punkt $D \in \mathcal{P}$ ein* Parallelogrammschluž zu (A, B, C), *wenn die folgenden Strecken parallel sind:*

$$(A, B) \parallel (C, D) \wedge (B, C) \parallel (A, D)$$

Man sagt dann auch,das Punktequadrupel $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}^4$ bildet ein Parallelogramm.



Die Menge aller Parallelogramme auf einem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$ werde bezeichnet mit:

$$\Pi := \{(A, B, C, D) \in \mathcal{P}^4 \mid (A, B) \parallel (C, D) \wedge (B, C) \parallel (A, D)\}$$

Bem. 1.5* *Ist $(\mathcal{P}, \|)$ ein affiner Graph, so existiert zu einem Punktetripel $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$ mit $A \neq B \neq C$ stets ein Parallelogrammschluž $D \in \mathcal{P}$.*

Beweis zu **1.5*** : Es seien Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B \neq C$ beliebig vorgegeben. Dann gilt im zu $(\mathcal{P}, \|)$ geh"rigen graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$:

$$AC \subset AB \circ BC$$

Ferner gilt $C\,AC\,A$,da alle Relationen in $\mathcal{R}$ symmetrisch sind. Damit gilt:

$$C\,AB \circ BC\,A \succ \bigvee_{D \in \mathcal{P}} C\,AB\,D \wedge D\,BC\,A$$

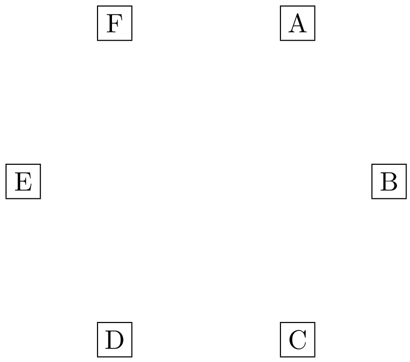
Wegen $A \neq B$ und $B \neq C$ gilt dabei $C \neq D$ und $D \neq A$. Damit gilt:

$$(A, B) \parallel (C, D) \wedge (B, C) \parallel (A, D)$$

Die Existenz eines Parallelogrammschlusses D zum Punktetripel (A, B, C) ist damit nachgewiesen.

□

Die Eindeutigkeit von Parallelogrammen ist bei affinen Graphen im allgemeinen nicht gegeben. Im zyklischen Graphen der Ordnung 6 (siehe S.85) sind zum Beispiel C und E Parallelogrammschlüsse zum Punktetripel (A, B, D).



Eine hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit von Parallelogrammen wird durch folgendes Lemma gegeben:

Lemma 1.6 *Sei $(\mathcal{P}, \|)$ ein affiner Graph. Zu einem Punktetripel $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$ mit $A \neq B \neq C$ ist der Parallelogrammschluž $D \in \mathcal{P}$ eindeutig , wenn im graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$*

$$AB \circ AB \cap BC \circ BC = O$$

gilt.

Beweis zu **1.6**: Es seien Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ gegeben mit $A \neq B \neq C$.
Es gelte $AB \circ AB \cap BC \circ BC = O$.
Sind dann die Punkte $D \in \mathcal{P}$ und $D' \in \mathcal{P}$ Parallelogrammschlüsse zu (A, B, C), so müssen folgende Strecken parallel sein:

$$(A, B) \parallel (C, D) \wedge (B, C) \parallel (A, D) \wedge (A, B) \parallel (C, D') \wedge (B, C) \parallel (A, D')$$

Damit gilt im graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$:

$$\begin{aligned}
& D\,AB\,C \wedge C\,AB\,D' \wedge D\,BC\,A \wedge A\,BC\,D' \\
\succ\ & D\,AB \circ AB\,D' \wedge D\,BC \circ BC\,D' \\
\succ\ & D\,(AB \circ AB \cap BC \circ BC)\,D' \\
\succ\ & D\,O\,D' \\
\succ\ & D = D'
\end{aligned}$$

Damit ist der Parallelogrammschluž zum Tripel (A, B, C) eindeutig.
□

Die direkte Umkehrung des Lemmas 1.6 gilt nicht: Es kann in einem affinen Graphen durchaus Punkte $A \neq B \neq C \in \mathcal{P}$ geben,für die

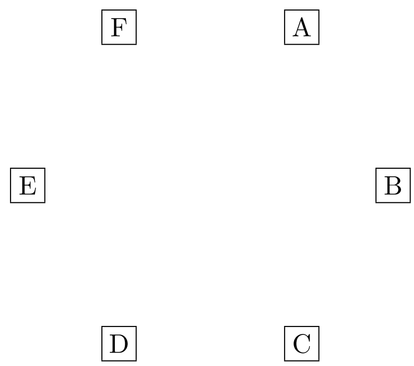
$$AB \circ AB \cap BC \circ BC \neq O$$

gilt,aber der Parallelogrammschlu$\check{z}$ zu (A, B, C) eindeutig ist.

Im zyklischen Graphen der Ordnung 6 ist zum Beispiel nur A ein Parallelogrammschlu$\check{z}$ zu (F, A, B),obwohl im zugeh"rigen graphischen Relativ

$$AC \subset FA \circ FA \cap AB \circ AB$$

gilt.



Es kann lediglich gezeigt werden:

Lemma 1.7 *Gibt es in einem graphischen Relativ* $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ *Relationen* $a, b \in \mathcal{R}\backslash\{O\}$ *mit*

$$a \circ a \cap b \circ b \neq O$$

so können zu jedem Punkt $A \in \mathcal{P}$ *Punkte* $B, C \in \mathcal{P}$ *mit* $AB = a$ *und* $BC = b$ *so gewählt werden, daß im affinen Graphen* $(\mathcal{P}, \|) = (\mathcal{P}, \mathcal{R})\gamma$ *der Parallelogrammschlu$\check{z}$ zu* (A, B, C) *nicht eindeutig ist.*

Beweis zu **1.7**: $a, b \in \mathcal{R}\backslash\{O\}$ seien Relationen mit $a \circ a \cap b \circ b \neq O$.

Dann gibt es Punkte $A_1, A_2 \in \mathcal{P}$ und Punkte $B_1, B_2 \in \mathcal{P}$ mit $a = A_1A_2$ und $b = B_1B_2$.

Damit gilt $O \subset (A_1A_2 \circ A_2A_1 \cap B_1B_2 \circ B_2B_1) = (a \circ a \cap b \circ b)$

Wegen $O \neq a \circ a \cap b \circ b$ mu$\check{z}$ es damit Punkte $E_1 \neq E_2 \in \mathcal{P}$ geben mit

$$
\begin{aligned}
& E_1\,(a \circ a \cap b \circ b)\,E_2 \\
\succ\quad & E_1\, a \circ a\, E_2 \wedge E_1\, b \circ b\, E_2 \\
\succ\quad & \bigvee_{F_1, F_2 \in \mathcal{P}} E_1\, a\, F_1 \wedge F_1\, a\, E_2 \wedge E_1\, b\, F_2 \wedge F_2\, b\, E_2 \\
\succ\quad & \bigvee_{F_1, F_2 \in \mathcal{P}} E_1F_1 = a = F_1E_2 \wedge E_1F_2 = b = F_2E_2 \\
\succ\quad & \bigvee_{F_1, F_2 \in \mathcal{P}} E_1E_2 \subset E_1F_1 \circ F_1E_2 = a \circ a \wedge E_1E_2 \subset E_1F_2 \circ F_2E_2 = b \circ b \\
\succ\quad & E_1E_2 \subset (a \circ a \cap b \circ b)
\end{aligned}
$$

Damit kann eine Relation $E_1E_2 = c \in \mathcal{R}\backslash\{O\}$ gewählt werden mit

$c \subset (a \circ a \cap b \circ b)$

Es sei ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben. Nach 1.4 gilt dann:

$$\bigvee_{D,D' \in \mathcal{P}} AD = a \wedge AD' = a \wedge DD' = c$$

Es gilt weiterhin:

$$D\,c\,D' \succ D\,b \circ b\,D' \succ \bigvee_{C \in \mathcal{P}} CD = b \wedge CD' = b$$

Wegen $a, b, c \neq O$ gilt dabei $A \neq D, D'$ und $C \neq D, D'$ sowie $D \neq D'$. Damit gilt im affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|) = (\mathcal{P}, \mathcal{R})\gamma$:

$(A, D) \parallel (A, D') \wedge (D, C) \parallel (C, D')$

Nach 1.5* gibt es einen Parallelogrammschluž B zu (A, D, C). Damit gilt für einen geeigneten Punkt $B \in \mathcal{P}$:

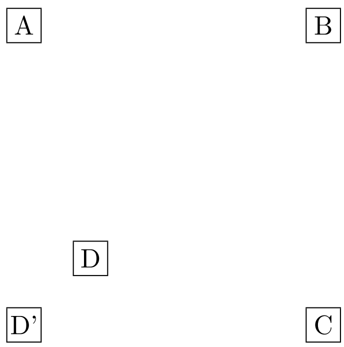
$(A, D) \parallel (C, B) \wedge (D, C) \parallel (A, B)$

Damit gilt:

$(A, B) \parallel (C, D) \wedge (B, C) \parallel (A, D)$

$(A, B) \parallel (C, D') \wedge (B, C) \parallel (A, D')$

Es sind also D und $D' \neq D$ zwei verschiedene Parallelogrammschlüsse zum Punktetripel (A, B, C).



□

Um die algebraische Bedingung zur Eindeutigkeit von Parallelogrammen geometrisch ausdrücken zu können,ist damit folgende Hilfsdefinition nötig:

Def. 1.8 *Ein Parallelogramm (A, B, C, D) auf einem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$ heiže* global eindeutig*,wenn für alle Punkte $F, G \in \mathcal{P}$ mit*

$$(A, F) \parallel (A, B) \wedge (F, G) \parallel (B, C)$$

der Parallelogrammschluž zu (A, F, G) eindeutig ist.

Mit dieser Definition gilt dann:

Satz 1.8* *$(\mathcal{P}, \|)$ sei ein affiner Graph. Dann ist ein Parallelogramm*

$$(A, B, C, D) \in \Pi$$

genau dann global eindeutig,wenn im graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$ gilt:

$$AB \circ AB \cap BC \circ BC = O$$

Beweis zu **1.8*** : Der Beweis dieses Satzes folgt aus den Lemmata 1.6 und 1.7.
□

1_ II.2 Abgeschlossene Relationen auf graphischen Relativen

Eine abgeschlossene Relation auf einem graphischen Relativ wird folgendermažen definiert:

Def. 1.9 *Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ ein graphisches Relativ und es sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ eine zweistellige Relation auf $\mathcal{P}$. Dann heiže $\mathcal{U}$* abgeschlossen bezüglich $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$*,wenn gilt:*

$$\bigwedge_{A,B \in \mathcal{P}} A\mathcal{U}B \Longrightarrow AB \subset \mathcal{U}$$

Die Menge aller bezüglich $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ abgeschlossenen Relationen werde mit $\dot{\mathcal{R}}$ bezeichnet.

Satz 1.9* *Eine zweistellige Relation $\mathcal{U} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ist genau dann bezüglich eines vorgegebenen graphischen Relativs $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ abgeschlossen,wenn gilt:*

$$\bigvee_{\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}} \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{R}'$$

Für die abgeschlossenen Relationen eines graphischen Relatives $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ gelten folgende Kürzungsregeln:

I. $$\bigwedge_{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \dot{\mathcal{R}}} \bigwedge_{A \in \mathcal{P}} A\mathcal{U}_1 \subset A\mathcal{U}_2 \Longrightarrow \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$$

II. $$\bigwedge_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}} \bigcup \mathcal{R}_1 \subset \bigcup \mathcal{R}_2 \Longrightarrow \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$$

Beweis zu **1.9*** :

$\mathcal{U} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ sei eine abgeschlossene Relation auf $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$.

Betrachte $\mathcal{R}' := \{AB \in \mathcal{R} \mid A\mathcal{U}\,B\}$.

Dann gilt für beliebige Punkte $A, B \in \mathcal{P}$:

$$A\mathcal{U}\,B \succ AB \in \mathcal{R}' \succ A \bigcup \mathcal{R}'\,B$$

Damit gilt $\mathcal{U} \subset \bigcup \mathcal{R}'$. Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned}
\bigcup \mathcal{R}' &= \bigcup \{AB \in \mathcal{R} \mid A\mathcal{U}\,B\} \\
&= \bigcup \{AB \in \mathcal{R} \mid AB \subset \mathcal{U}\} \\
&\subset \mathcal{U}
\end{aligned}$$

Damit gilt $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{R}'$.Damit gibt es zu jeder abgeschlossenen Relation $\mathcal{U} \in \dot{\mathcal{R}}$ eine Teilmenge $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ mit $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{R}'$.

Es sei nun eine Teilmenge $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ beliebig gegeben.Dann ist $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{R}'$ eine Relation auf $\mathcal{P}$.Es muž gezeigt werden,daž $\mathcal{U}$ bezüglich $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ abgeschlossen ist.

Es gilt für beliebige Punkte $A, B \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
A\mathcal{U}\,B &\succ A \bigcup \mathcal{R}'\,B \\
&\succ \bigvee_{a \in \mathcal{R}'} A\,a\,B \\
&\succ \bigvee_{a \in \mathcal{R}'} AB = a \\
&\succ AB \subset \bigcup \mathcal{R}' = \mathcal{U}
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{U}$ bezüglich $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ abgeschlossen.

Damit ist die Grundbehauptung von 1.9* bewiesen.

Noch zu zeigen sind die Kürzungsregeln 1.9_- I und 1.9_- II.

Zu 1.9_- I:Es seien abgeschlossene Relationen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \dot{\mathcal{R}}$ und es sei ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.Gilt dann $A\mathcal{U}_1 \subset A\mathcal{U}_2$,so gilt für alle Punkte $B, C \in$

$\mathcal{P}$:

$$
\begin{aligned}
B\,\mathcal{U}_1\,C &\succ BC \subset \mathcal{U}_1 \\
&\succ \bigvee_{D\in\mathcal{P}} BC = AD \in \mathcal{U}_1 && \text{Linkstotalität von } BC \\
&\succ \bigvee_{D\in\mathcal{P}} BC = AD \wedge D \in A\mathcal{U}_1 \subset A\mathcal{U}_2 \\
&\succ \bigvee_{D\in\mathcal{P}} BC = AD \wedge AD \subset \mathcal{U}_2 \\
&\succ BC \subset \mathcal{U}_2 \\
&\succ B\,\mathcal{U}_2\,C
\end{aligned}
$$

Damit gilt $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$.

Zu 1.9$_-$ II:Es seien Teilmengen $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}$ vorgegeben mit $\bigcup \mathcal{R}_1 \subset \bigcup \mathcal{R}_2$.Dann gilt für beliebige Relationen $AB \in \mathcal{R}$ $(A, B \in \mathcal{P})$:

$$
\begin{aligned}
AB \in \mathcal{R}_1 &\succ AB \subset \bigcup \mathcal{R}_1 \subset \bigcup \mathcal{R}_2 \\
&\succ A \bigcup \mathcal{R}_2\, B \\
&\succ \bigvee_{a\in\mathcal{R}_2} A\,a\,B \\
&\succ \bigvee_{a\in\mathcal{R}_2} AB = a \\
&\succ AB \in \mathcal{R}_2
\end{aligned}
$$

Damit gilt $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$.

□

Satz 1.10 $(\dot{\mathcal{R}}, \circ)$ *ist eine kommutative Halbgruppe mit O als neutralem Element.*

Zum Beweis von 1.10 wird zunächst das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 1.10* *Alle Relationen in $\dot{\mathcal{R}}$ sind symmetrisch.*

Beweis zu **1.10*** : Es sei eine Relation $a \in \dot{\mathcal{R}}$ und es seien Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben.Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
A\,a\,B &\succ (B, A) \in AB \subset a && \text{da } AB \in \mathcal{R} \text{ symmetrisch ist} \\
&\succ B\,a\,A
\end{aligned}
$$

Damit sind alle Relationen $a \in \dot{\mathcal{R}}$ symmetrisch.

□

Mit Hilfe des Lemmas 1.10* kann nun der Satz 1.10 bewiesen werden.

Beweis zu **1.10**: $\dot{\mathcal{R}}$ ist gegen das Relationenprodukt $\circ$ abgeschlossen,da für beliebige Relationen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \dot{\mathcal{R}}$ und für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\begin{aligned}
A\,\mathcal{U}_1 \circ \mathcal{U}_2\,B &\succ \bigvee_{C\in\mathcal{P}} A\,\mathcal{U}_1\,C \wedge C\,\mathcal{U}_2\,B \\
&\succ \bigvee_{C\in\mathcal{P}} AC \subset \mathcal{U}_1 \wedge CB \subset \mathcal{U}_2 \\
&\succ \bigvee_{C\in\mathcal{P}} AB \subset AC \circ CB \subset \mathcal{U}_1 \circ \mathcal{U}_2 \\
&\succ AB \subset \mathcal{U}_1 \circ \mathcal{U}_2
\end{aligned}$$

Damit gilt $\mathcal{U}_1 \circ \mathcal{U}_2 \in \dot{\mathcal{R}}$.

Da $\circ$ für alle Relationen assoziativ ist,ist $(\dot{\mathcal{R}}, \circ)$ damit eine Halbgruppe.

Ferner gilt für beliebige Relationen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \dot{\mathcal{R}}$ und für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
A\,\mathcal{U}_1 \circ \mathcal{U}_2\,B &\succ \bigvee_{C\in\mathcal{P}} A\,\mathcal{U}_1\,C \wedge C\,\mathcal{U}_2\,B \\
&\succ \bigvee_{C\in\mathcal{P}} B\,\mathcal{U}_2\,C \wedge C\,\mathcal{U}_1\,A \quad \text{nach 1.10*} \\
&\succ B\,\mathcal{U}_2 \circ \mathcal{U}_1\,A \\
&\succ A\,\mathcal{U}_2 \circ \mathcal{U}_1\,B \qquad\qquad \text{nach 1.10*}
\end{aligned}$$

Damit gilt $\mathcal{U}_1 \circ \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_2 \circ \mathcal{U}_1$ für beliebige Relationen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \dot{\mathcal{R}}$. Damit gilt sogar:

$$\bigwedge_{\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2\in\dot{\mathcal{R}}} \mathcal{U}_1 \circ \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2 \circ \mathcal{U}_1$$

$(\dot{\mathcal{R}}, \circ)$ ist damit eine kommutative Halbgruppe.

□

1_ III Affine Graphen und affine Geometrien

Eine wichtige Klasse von Beispielen für affine Graphen bilden die affinen Geometrien,als deren Verallgemeinerung die affinen Graphen hier aufgefasst werden sollen. Im folgenden wird gezeigt,wie affine Geometrien als Spezialfall affiner Graphen definiert werden können.

Es wird zunächst die Definition einer affinen Geometrie gegeben. Die Definition ist analog zu [1] Def.1.9.

Def. 1.11 $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|)$ *hei×e eine affine Geometrie,wenn gegeben sind:*

I. *eine Menge* $\mathcal{P} = \{A, B, \ldots\} \neq \emptyset$

II. *eine Menge* $\mathcal{G} \subset \mathrm{Pot}\mathcal{P}$

III. $\in$ *als Inzidenzrelation auf* $\mathcal{P} \times \mathcal{G}$

IV. *eine Äquivalenzrelation* $\|$ *auf* $\mathcal{G}$

und wenn die folgenden Bedingungen gelten:

V. $\bigwedge_{A \neq B \in \mathcal{P}} \overset{1}{\bigvee_{g \in \mathcal{G}}} A, B \in g$
Diese eindeutige Verbindungsgerade zu A *und* B *werde als* g_{AB} *bezeichnet.*

VI. $\bigwedge_{g \in \mathcal{G}} \bigvee_{A \neq B \in \mathcal{P}} A, B \in g$

VII. $\bigwedge_{A \in \mathcal{P}} \bigwedge_{g \in \mathcal{G}} \overset{1}{\bigvee_{g' \in \mathcal{G}}} A \in g' \wedge g' \| g$

VIII. *Sind* $A, B, C \in \mathcal{P}$ *paarweise verschiedene Punkte und sind* $A', B' \in \mathcal{P}$ *Punkte mit* $A' \neq B'$*,so gilt:*

$$g_{AB} \| g_{A'B'} \succ \bigvee_{C' \in \mathcal{P}} g_{AC} \| g_{A'C'} \wedge g_{CB} \| g_{C'B'}$$

Es sollen die Strukturen deutlich gemacht werden, durch die affine Graphen und affine Geometrien aufeinander beziehbar sind. Dazu wird zunächst der Begriff der *Geraden* auf einem affinen Graphen eingeführt und untersucht.

Def. 1.12 $(\mathcal{P}, \|)$ *sei ein affiner Graph.Dann hei×e* $G \subset \mathcal{P}$ *eine* Gerade auf $(\mathcal{P}, \|)$*,wenn gilt:*

I. $\bigvee_{A \neq B \in \mathcal{P}} A, B \in G$

II. $\bigwedge_{A \neq B \in G} \bigwedge_{C \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\}} C \in G \Longleftrightarrow (A, B) \| (A, C)$

Um den Begriff der Geraden auf einem affinen Graphen algebraisch untersuchen zu können, werden au×erdem die folgenden Definitionen getroffen:

Def. 1.13 *Ist* $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ *ein graphisches Relativ,so hei×t eine Relation* $a \in \mathcal{R}$ alternierend*,wenn gilt:*

$a \circ a \subset a \cup O$

Def. 1.14 *Es sei* $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ *ein graphisches Relativ.Eine Menge* $G_{A\,a} \subset \mathcal{P}$ *kann für alle Punkte* $A \in \mathcal{P}$ *und für alle Relationen* $a \in \mathcal{R}$ *definiert werden durch:*

$$G_{A\,a} := \{C \in \mathcal{P} \mid A\,a\,C\} \cup \{A\}$$

Der Zusammenhang zwischen alternierenden Relationen und Geraden kann nun genauer untersucht werden.

Satz 1.15 *Sei* $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ *ein graphisches Relativ. Dann ist eine Relation* $a \in \mathcal{R}$ *genau dann alternierend,wenn* $\{G_{A\,a} \in \mathrm{Pot}\mathcal{P} \mid A \in \mathcal{P}\}$ *eine Klasseneinteilung auf* $\mathcal{P}$ *bildet.*

Beweis zu **1.15**: Im folgenden sei auf einem graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ eine Relation $a \in \mathcal{R}$ beliebig vorgegeben.

$a \in \mathcal{R}$ sei zunächst alternierend. Es gilt für beliebige Punkte $A \in \mathcal{P}$ $A \in G_{A\,a}$ nach der Definition von $G_{A\,a}$.Um nachzuweisen,da× $\{G_{A\,a} \mid A \in \mathcal{P}\}$ eine Klasseneinteilung auf $\mathcal{P}$ bildet, genügt es damit, für beliebige Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ zu zeigen:

$$B \in G_{A\,a} \succ G_{B\,a} = G_{A\,a}$$

Dabei kann $A \neq B$ vorausgesetzt werden.Dann gilt:

$$B \in G_{A\,a} \succ A\,a\,B \succ AB = a$$

Damit genügt es zu zeigen:

$$AB = a \succ G_{A\,a} = G_{B\,a}$$

Angenommen es sei $AB = a$ und $G_{A\,a} \neq G_{B\,a}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dann ein Punkt $C \in \mathcal{P}$ angenommen werden mit $C \in G_{A\,a}$ und $C \notin G_{B\,a}$.

Es gilt $AB = a \succ B\,a\,A \succ A \in G_{B\,a}$

Wegen $C \notin G_{B\,a}$ mu× damit mu× $A \neq C$ gelten.

Dann mu× gelten:

$$\begin{aligned} C \in G_{A\,a} &\succ C\,a\,A \wedge A\,a\,B && AB = a \text{ ist vorausgesetzt} \\ &\succ B\,a \circ a\,C && \\ &\succ C\,a\,B \vee C = B && a \text{ ist alternierend} \\ &\succ C \in G_{B\,a} && \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

Damit mu× $G_{A\,a} = G_{B\,a}$ gelten.

Damit bildet $\{G_{A\,a} \in \mathrm{Pot}\mathcal{P} \mid A \in \mathcal{P}\}$ eine Klasseneinteilung auf $\mathcal{P}$.

Sei umgekehrt $\{G_{A\,a} \in \mathrm{Pot}\mathcal{P} \mid A \in \mathcal{P}\}$ eine Klasseneinteilung auf $\mathcal{P}$. Es seien Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
A\,a \circ a\,B \quad & \succ \quad \bigvee_{C \in \mathcal{P}} A\,a\,C \wedge C\,a\,B \\
& \succ \quad \bigvee_{C \in \mathcal{P}} C \in G_{Aa} \wedge B \in G_{Ca} \\
& \succ \quad \bigvee_{C \in \mathcal{P}} G_{Aa} = G_{Ca} \wedge G_{Ca} = G_{Ba} \\
& \succ \quad G_{Aa} = G_{Ba} \\
& \succ \quad B \in G_{Aa} \\
& \succ \quad A\,a\,B \vee A = B
\end{aligned}
$$

Damit gilt $a \circ a \subset a \cup O$.

a ist also alternierend.

□

Satz 1.16 $(\mathcal{P}, \|)$ *sei ein affiner Graph.* $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$ *sei das zu ihm gehörige graphische Relativ.Dann gelten die folgenden Umkehrungen:*

1.16.1 *Für alternierende Relationen $a \in \mathcal{R}$ mit $a \neq O$ und für beliebige Punkte $A \in \mathcal{P}$ ist G_{Aa} eine Gerade auf $(\mathcal{P}, \|)$.*

1.16.2 *Ist $G \subset \mathcal{P}$ eine Gerade auf $(\mathcal{P}, \|)$, so gibt es im zugehörigen graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ eine Relation $a \in \mathcal{R}$ und einen Punkt $A \in \mathcal{P}$,für die $G = G_{A\,a}$ gilt. Die Relation a ist dabei alternierend und es gilt $a \neq O$.*

Beweis zu **1.16.1**: Es sei $a \in \mathcal{R}$ eine alternierende Relation auf $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ mit $a \neq O$. Ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ sei beliebig gegeben.Es mu× gezeigt werden, da× $G_{A\,a}$ eine Gerade ist.

zu 1.12$_-$ I: Es gilt $A \in G_{Aa}$ und es gibt wegen der Linkstotalität von a einen Punkt $B \in \mathcal{P}$ mit $A\,a\,B$. Wegen $a \neq O$ gilt dabei $A \neq B$. Damit gibt es Punkte $A, B \in G_{Aa}$ mit $A \neq B$.

zu 1.12$_-$ II: Es seien Punkte $B \neq C \in G_{Aa}$ und es sei ein Punkt $D \in \mathcal{P} \backslash \{B, C\}$ vorgegeben. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
(B, C) \parallel (B, D) \quad & \succ\!\!\prec \quad B\,BC\,D \\
& \succ\!\!\prec \quad D \in G_{B\,BC}
\end{aligned}
$$

Da a alternierend ist,gilt au×erdem:

$$\begin{aligned} B, C \in G_{Aa} &\succ (A\,a\,B \vee A = B) \wedge (A\,a\,C \vee A = C) \\ &\succ B\,a \circ a\,C \vee B\,a\,C \vee B = C \\ &\succ BC = a \qquad\qquad\qquad\qquad \text{es gilt } B \neq C \end{aligned}$$

Ferner gilt,da nach 1.15 $\{G_{Aa} \in \mathrm{Pot}\mathcal{P} \mid A \in \mathcal{P}\}$ eine Klasseneinteilung bildet und $B \in G_{Aa}$ gilt,$G_{Aa} = G_{Ba}$.

Damit gilt $G_{B\,BC} = G_{Ba} = G_{Aa}$.

Es gilt also $(B,C) \parallel (B,D) \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail D \in G_{Aa}$.

Damit ist G_{Aa} eine Gerade.

□

Beweis zu **1.16.2**: Es sei G eine Gerade auf $(\mathcal{P}, \|)$. Wähle Punkte $A \neq B \in G$.Betrachte die Relation AB auf $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$. Es gilt für alle Punkte $C \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} C \in G_{A\,AB} &\rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail A\,AB\,C \vee C = A \\ &\rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail (A,B) \parallel (A,C) \vee C = A \\ &\rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail C \in G \end{aligned}$$

Damit gilt $G_{A\,AB} = G$.Es können also ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ und eine Relation $a \in \mathcal{R}$ mit $G = G_{A\,a}$ gefunden werden.

Es mu× noch gezeigt werden,da× jede derartige Relation $a \in \mathcal{R}$ alternierend ist und da× $a \neq O$ gilt. Dazu mu× gezeigt werden:

Eine Relation $a \in \mathcal{R}$ und ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ seien beliebig gewählt. Ist dann $G_{A\,a}$ eine Gerade, so ist a alternierend und es gilt $a \neq O$.

Es gilt $a \neq O$,da $G_{A\,O} = \{A\}$ weniger als zwei Punkte enthält.

Ferner gilt für beliebige Punkte $B \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} A\,a \circ a\,B &\succ \bigvee_{C \in \mathcal{P}} A\,a\,C \wedge C\,a\,B \\ &\succ \bigvee_{C \in \mathcal{P}} C \in G_{A\,a} \wedge (A,C) \parallel (C,B) \qquad A \neq C \text{ gilt wegen } a \neq O \\ &\succ B \in G_{A\,a} \qquad\qquad\qquad\qquad G_{A\,a} \text{ ist eine Gerade} \\ &\succ A\,a\,B \vee A = B \end{aligned}$$

Damit gilt $A\,a \circ a \subset A\,(a \cup O)$.

Daraus folgt nach der Kürzungsregel 1.9_ I: $a \circ a \subset a \cup O$.

Damit ist a alternierend.

□

Aus 1.15 und 1.16 lä×t sich folgendes schlie×en:

Ist G eine Gerade auf einem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$,so gibt es eine Klasseneinteilung auf $\mathcal{P}$,die ausschlie×lich aus Geraden besteht,zu denen G gehört.Eine solche Klasseneinteilung kann als eine *Parallelklasse* von Geraden auf $(\mathcal{P}, \|)$ bezeichnet werden.

Jeder solchen Parallelklasse auf $(\mathcal{P}, \|)$ entspricht eine alternierende Relation auf dem graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$.

Eine affine Geometrie mu× ausschlie×lich aus Parallelklassen von Geraden bestehen.Soll aus einem graphischen Relativ eine affine Geometrie gewonnen werden,so müssen damit in diesem Relativ sämtiche Relationen alternierend sein.

Def. 1.17 *Ein graphisches Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ hei×e* geometrisch*, wenn alle Relationen in $\mathcal{R}$ alternierend sind. Der affine Graph $(\mathcal{P}, \|) = (\mathcal{P}, \mathcal{R})\gamma$ wird dann ebenfalls* geometrisch *genannt.*

Satz 1.17* *Die Klasse der affinen Geometrien kann durch folgende Umkehrungen synonym auf die Klasse der affinen geometrischen Graphen bezogen werden:*

1.17.1 *Ist $(\mathcal{P}, \|)$ ein geometrischer affiner Graph, so wird durch $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|_G)$ mit*

$$\mathcal{G} := \{G_{A\,AB} \mid A \neq B \in \mathcal{P}\}$$

$$\bigwedge_{A,B,C,D \in \mathcal{P}} G_{A\,AB} \|_G G_{C\,CD} :\Longleftrightarrow (A, B) \| (C, D)$$

eine affine Geometrie definiert.

1.17.2 *Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|)$ eine affine Geometrie,so wird durch $(\mathcal{P}, \|_{\mathcal{P}})$ mit*

$$\bigwedge_{A,B,C,D \in \mathcal{P}} (A, B) \|_{\mathcal{P}} (C, D) :\Longleftrightarrow g_{AB} \| g_{CD}$$

ein affiner Graph definiert.Dieser affine Graph ist geometrisch.

Beweis zu **1.17.1**: Es mu× nachgewiesen werden,da× $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|_G)$ eine affine Geometrie ist.

Nach der Definition gilt $\mathcal{P} \neq \emptyset$ und $\mathcal{G} \subset \mathrm{Pot}\mathcal{P}$. $\|_G$ ist eine Äquivalenzrelation, da $\|$ eine Äquivalenzrelation ist.

Es müssen noch die Bedingungen 1.11_ V–1.11_ VIII nachgewiesen werden.

Zu 1.11_ V:Es seien Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben. Dann gilt $A, B \in G_{A\,AB}$. Die Existenz einer Verbindungsgeraden zu A und B ist damit nachgewiesen.

Angenommen $G_{C\,CD}$ mit $C \neq D \in \mathcal{P}$ wäre eine weitere Gerade mit $A, B \in G_{C\,CD}$.Dann mu× gelten:

$$\begin{aligned} A, B \in G_{C\,CD} \quad \succ \quad & CA = CD = CB \\ & \vee(A = C \wedge CD = CB) \\ & \vee(B = C \wedge CA = CD) \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Fällen folgt direkt $AB = CD$.

Im ersten Fall gilt:

$$\begin{aligned} CA = CD = CB \quad & \succ \quad AB \subset AC \circ CB = CD \circ CD \\ & \succ \quad AB \subset CD \circ CD = CD \cup O \qquad \text{CD ist alternierend} \\ & \succ \quad AB = CD \end{aligned}$$

Damit gilt in jedem Fall $A \in G_{C\,CD} = G_{C\,AB}$.

Damit gilt nach 1.15 $G_{A\,AB} = G_{C\,AB}$.

Damit gilt $G_{C\,CD} = G_{A\,AB}$.

Die Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden zu A und B ist damit ebenfalls nachgewiesen.

Es gilt also $G_{A\,AB} = g_{AB}$,wobei g_{AB} die eindeutig gegebene Verbindungsgerade zu A und B nach 1.11_ V bezeichne.

Zu 1.11_ VI:Für alle Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ gilt $A, B \in G_{A\,AB}$. Damit liegen auf jeder Geraden mindestens zwei Punkte.

Zu 1.11_ VII:Ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ und eine Gerade $g_{BC} \in \mathcal{G}(B \neq C \in \mathcal{P})$ seien beliebig gegeben. Dann gibt es nach 1.1_ IV einen Punkt $D \in \mathcal{P}$ mit

$$(A, D) \parallel (B, C)$$

Mit diesem Punkt $D \in \mathcal{P}$ gilt dann:

$$A \in g_{AD} = G_{A,AD} \parallel_G G_{B\,BC} = g_{BC}$$

Die Existenz einer zu g_{BC} parallelen Geraden durch A ist damit nachgewiesen.

Angenommen,es gäbe eine weitere Gerade $g_{EF} \in \mathcal{G}$ $(E \neq F \in \mathcal{P})$,so da× gilt:

$$A \in g_{EF} \parallel_G g_{BC}$$

Dann gilt $g_{EF} = g_{AF}$ wegen der Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden (ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $A \neq F$ vorausgesetzt werden). Weiterhin gilt:

$$\begin{array}{llll} g_{AF} \parallel_G g_{BC} & \succ & (A,F) \parallel (B,C) & \\ & \succ & (A,F) \parallel (A,D) & \text{da } (A,D) \parallel (B,C) \text{ gilt} \\ & \succ & AF = AD & \text{in } (\mathcal{P},\mathcal{R}) \\ & \succ & g_{AF} = G_{A\,AF} = G_{A\,AD} = g_{AD} & \end{array}$$

Die Eindeutigkeit der parallelen Geraden zu g_{BC} durch den Punkt A ist damit ebenfalls nachgewiesen.

Zu 1.11_ VIII:$A, B, C \in \mathcal{P}$ seien paarweise verschiedene Punkte, und es seien Punkte $A', B' \in \mathcal{P}$ gegeben mit $A' \neq B'$.Dann gilt:

$$\begin{array}{ll} & g_{AB} \parallel_G g_{A'B'} \\ \succ & (A,B) \parallel (A',B') \\ \succ & \bigvee_{C' \in \mathcal{P}} (A',C') \parallel (A,C) \wedge (B',C') \parallel (B,C) \quad \text{nach 1.1\_ V} \\ \succ & \bigvee_{C' \in \mathcal{P}} g_{A'C'} \parallel_G g_{AC} \wedge g_{B'C'} \parallel_G g_{BC} \end{array}$$

Damit ist 1.11_ VIII nachgewiesen.

Damit ist$(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \parallel_\mathcal{G})$ eine affine Geometrie.

□

Beweis zu **1.17.2**: Es mu× gezeigt werden,da× $(\mathcal{P}, \parallel_\mathcal{P})$ ein affiner Graph ist und da× in dem zu ihm gehörigen graphischen Relativ $(\mathcal{P},\mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \parallel_\mathcal{P})\alpha$ alle Relationen alternierend sind.

Es gilt $\mathcal{P} \neq \emptyset$. $\parallel_\mathcal{P}$ ist eine Äquivalenzrelation,da $\parallel$ eine Äquivalenzrelation ist.

1.1_ III gilt,da $g_{AB} = g_{BA}$ nach der Definition der eindeutigen Verbindungsgeraden für alle Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ gelten mu×.

Zu 1.1_ IV:Es seien Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ und ein Punkt $C \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben. Dann gibt es nach 1.11_ VII eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ mit $C \in g' \parallel g_{AB}$.

Es kann nach 1.11_ VI ein Punkt $D \in g$ gewählt werden mit $D \neq C$. Damit gilt nach 1.11_ V $g = g_{CD}$.Es gilt also:

$$g_{AB} \parallel g_{CD} \succ (A,B) \parallel (C,D)$$

Damit ist ein geeigneter Punkt $D \in \mathcal{P}$ gefunden mit $(A,B) \parallel (C,D)$.

Zu 1.1_ V:Seien $A, B, C \in \mathcal{P}$ paarweise verschiedene Punkte und seien $A', B' \in \mathcal{P}$

Punkte mit $A' \neq B'$.Dann gilt:

$$\begin{array}{ll} & (A,B) \parallel_{\mathcal{P}} (A',B') \\ \succ & g_{AB} \parallel g_{A'B'} \\ \succ & \bigvee\limits_{C'\in\mathcal{P}} g_{AC} \parallel g_{A'C'} \wedge g_{CB} \parallel g_{C'B'} \qquad \text{nach 1.11\_ VIII} \\ \succ & \bigvee\limits_{C'\in\mathcal{P}} (A,C) \parallel_{\mathcal{P}} (A',C') \wedge (C,B) \parallel_{\mathcal{P}} (C',B') \end{array}$$

Damit ist 1.1_ V nachgewiesen.

Damit ist $(\mathcal{P}, \parallel_{\mathcal{P}})$ ein affiner Graph.

Sei AB mit $A, B \in \mathcal{P}$ eine beliebige Relation auf dem zu diesem affinen Graphen gehörigen graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \parallel_{\mathcal{P}})\alpha$. Es mu× nachgewiesen werden,da× AB alternierend ist.

Für $A = B$ ist $AB = O$ die Gleichheitsrelation,die in jedem Fall alternierend ist.

Ist $A \neq B$,so gilt für beliebige Punkte $C, D \in \mathcal{P}$:

$$\begin{array}{lll} C\,AB \circ AB\,D & \succ & \bigvee\limits_{E\in\mathcal{P}} C\,AB\,E \wedge E\,AB\,D \\ & \succ & \bigvee\limits_{E\in\mathcal{P}} (C,E) \parallel_{\mathcal{P}} (A,B) \parallel_{\mathcal{P}} (E,D) \\ & \succ & \bigvee\limits_{E\in\mathcal{P}} g_{CE} \parallel g_{AB} \parallel g_{ED} \\ & \succ & \bigvee\limits_{E\in\mathcal{P}} g_{CE} = g_{ED} \parallel g_{AB} \qquad \text{nach 1.11\_ VII} \\ & \succ & \bigvee\limits_{E\in\mathcal{P}} g_{CD} \parallel g_{AB} \vee C = D \\ & \succ & (C,D) \parallel_{\mathcal{P}} (A,B) \vee C = D \\ & \succ & C\,AB\,D \vee C\,O\,D \end{array}$$

Damit gilt $AB \circ AB \subset AB \cup O$.

Die Relation AB ist also alternierend.

Damit ist $(\mathcal{P}, \parallel_{\mathcal{P}})$ ein geometrischer affiner Graph.

□

Beweis zu **1.17*** : $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \parallel)$ sei eine affine Geometrie.$(\mathcal{P}, \parallel_{\mathcal{P}})$ sei der aus ihr nach 1.17.2 gewonnene geometrische affine Graph und $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_{\mathcal{G}}, \in, \parallel_{\mathcal{G}})$ sei die aus ihm nach 1.17.1 gewonnene affine Geometrie.

Es sei eine Gerade $g_{AB_{\mathcal{G}}} \in \mathcal{G}_{\mathcal{G}}$ beliebig gewählt mit $A \neq B \in \mathcal{P}$. ($g_{AB_{\mathcal{G}}}$ bezeichne die eindeutige Verbindungsgerade durch A und B auf $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_{\mathcal{G}}, \in, \|_{\mathcal{G}})$.) Dann gilt

$$\begin{aligned}
g_{AB_{\mathcal{G}}} &= G_{A\,AB} \\
&= \{C \in \mathcal{P} \mid AB = AC\} \cup \{A\} \\
&= \{C \in \mathcal{P} \mid (A,B) \|_{\mathcal{P}} (A,C)\} \cup \{A\} \\
&= \{C \in \mathcal{P} \mid g_{AB} \parallel g_{AC}\} \cup \{A\} \\
&= \{C \in \mathcal{P} \mid g_{AB} = g_{AC}\} \cup \{A\} \\
&= \{C \in \mathcal{P} \mid C \in g_{AB}\} \\
&= g_{AB}
\end{aligned}$$

Damit gilt $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathcal{G}}$.

Es seien nun Geraden $g_{AB}, g_{CD} \in \mathcal{G}$ beliebig gewählt mit $A \neq B \in \mathcal{P}$ und $C \neq D \in \mathcal{P}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
g_{AB} \|_{\mathcal{G}}\, g_{CD} &\asymp (A,B) \|_{\mathcal{P}} (C,D) \\
&\asymp g_{AB} \parallel g_{CD}
\end{aligned}$$

Damit gilt $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}_{\mathcal{G}}, \in, \|_{\mathcal{G}})$.

Sei nun $(\mathcal{P}, \|)$ ein geometrischer affiner Graph. $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|_{\mathcal{G}})$ sei die durch 1.17.1 aus ihm gewonnene affine Geometrie und $(\mathcal{P}, \|_{\mathcal{P}})$ sei der wiederum durch 1.17.2 aus ihr gewonnene geometrische affine Graph.

Es seien Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ und Punkte $C \neq D \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben.Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(A,B) \|_{\mathcal{P}} (C,D) &\asymp g_{AB} \|_{\mathcal{G}}\, g_{CD} \\
&\asymp (A,B) \parallel (C,D)
\end{aligned}$$

Damit gilt $(\mathcal{P}, \|) = (\mathcal{P}, \|_{\mathcal{P}})$.

Damit kehren die Verfahren 1.17.1 und 1.17.2 einander um.

□

2 Der kleine affine Satz von Desargues

2_ I Schwach desarguesche Gruppenpartitionen

In [2] wird beschrieben,wie affine Geometrien durch desarguesche Gruppenpartitionen gestiftet werden können. Es wird gezeigt,da× die so gestifteten Geometrien bis auf Isomorphie genau die sind,die den kleinen affinen Satz von Desargues erfüllen.

Eine erweiterte Form der desargueschen Gruppenpartitionen kann dazu benutzt werden,affine Graphen zu stiften:

Def. 2.1 $(\mathcal{V}, \gamma)$ *hei×e eine* schwach desarguesche Gruppenpartition, *wenn*

I. $\mathcal{V}(+)$ *eine abelsche Gruppe ist (ihr neutrales Element werde mit* 0 *bezeichnet)*

II. γ *eine Abbildung von* $\mathcal{V}$ *nach* Pot$\mathcal{V}$ *ist mit* $0\gamma = \{0\}$

und wenn gilt:

III. $\bigwedge_{C \in \mathcal{V}} C, -C \in C\gamma$

IV. $\bigwedge_{C, C' \in \mathcal{V}} C\gamma \neq C'\gamma \Longrightarrow C\gamma \cap C'\gamma = \emptyset$

V. $\bigwedge_{A, B \in \mathcal{V}} (A + B)\gamma \subset A\gamma + B\gamma$

Bem. 2.1* *Damit gilt in einer schwach desargueschen Gruppenpartition* $(\mathcal{V}, \gamma)$ *für alle Elemente* $A, B \in \mathcal{V}$*:*

$$A \in B\gamma \bowtie A\gamma = B\gamma$$

$\{A\gamma \in \text{Pot}\mathcal{V} \mid A \in \mathcal{V}\}$ *bildet also eine Klasseneinteilung auf* $\mathcal{V}$.

Ein affiner Graph auf einer schwach desargueschen Gruppenpartition $(\mathcal{V}, \gamma)$ kann dann folgenderma×en definiert werden:

Satz 2.2 *Jede schwach desarguesche Gruppenpartition* $(\mathcal{V}, \gamma)$ *stiftet gemä×*

$$\mathcal{P} := \mathcal{V}$$

$$\bigwedge_{A \neq B, C \neq D \in \mathcal{P}} (A, B) \parallel (C, D) :\Longleftrightarrow (-A + B)\gamma = (-C + D)\gamma$$

einen affinen Graphen $(\mathcal{P}, \parallel)$.

Beweis zu **2.2**: Es ist $\mathcal{P} = \mathcal{V} \neq \emptyset$.

$\|$ ist eine Äquivalenzrelation, da "=" eine Äquivalenzrelation ist.Nach der Definition operiert $\|$ dabei nur auf $(\mathcal{P} \times \mathcal{P})\backslash O$.

Es müssen noch die Bedingungen 1.1_ III—1.1_ V nachgewiesen werden.

zu 1.1_ III: Es gilt für beliebige Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$:

$$\begin{array}{lll} & -(-A+B) \in (-A+B)\gamma & \text{nach 2.1\_ III} \\ \succ & -B+A \in (-A+B)\gamma & \text{da } \mathcal{V} \text{ abelsch ist} \\ \succ & (-B+A)\gamma = (-A+B)\gamma & \text{nach 2.1*} \\ \succ & (B,A) \parallel (A,B) & \end{array}$$

zu 1.1_ IV: Für alle Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ und für alle Punkte $C \in \mathcal{P}$ gilt mit $D := C - A + B$:

$$\begin{array}{lll} -A+B = -C+(C-A+B) & \succ & -A+B = -C+D \\ & \succ & (-A+B)\gamma = (-C+D)\gamma \\ & \succ & (A,B) \parallel (C,D) \end{array}$$

zu1.1_ V Es seien $A, B, C \in \mathcal{P}$ paarweise verschiedene Punkte und es seien Punkte $A' \neq B' \in \mathcal{P}$ gegeben mit $(A,B) \parallel (A',B')$. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} (A,B) \parallel (A',B') & \succ & (B-A)\gamma = (B'-A')\gamma \\ & \succ & B'-A' \in (B-A)\gamma \subset (B-C)\gamma + (C-A)\gamma \\ & \succ & \bigvee\limits_{B'' \in (B-C)\gamma} \bigvee\limits_{A'' \in (C-A)\gamma} B'-A' = B''-A'' \\ & \succ & \bigvee\limits_{B'' \in (B-C)\gamma} \bigvee\limits_{A'' \in (C-A)\gamma} B'-B'' = A'-A'' \end{array}$$

Setze $C' := B' - B'' = A' - A''$.

Dann gilt

$B' - C' = B'' \in (B-C)\gamma \wedge A' - C' = A'' \in (C-A)\gamma = (A-C)\gamma$

Daraus folgt

$(B', C') \parallel (B, C) \wedge (A', C') \parallel (A, C)$

Der Punkt $C' \in \mathcal{P}$ erfüllt damit die Dreiecksbedingung.

Damit ist $(\mathcal{P}, \|)$ ein affiner Graph.

□

Satz 2.2* *Das zu einem von einer schwach desargueschen Gruppenpartition $(\mathcal{V}, \gamma)$ gestifteten affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$ gehörige graphische Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$ ist gegeben durch:*

$$\mathcal{P} = \mathcal{V}$$

$$\mathcal{R} = \{AB \subset \mathcal{P}^2 \mid A, B \in \mathcal{P}\}$$

Dabei ist AB für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ definiert durch:

$$AB = \{(C, D) \in \mathcal{P}^2 \mid (-A + B)\gamma = (-C + D)\gamma\}$$

Beweis zu **2.2*** : Es gilt nach 1.3.2 für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ und für beliebige Punkte $C, D \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
& C\,AB\,D \\
\Leftrightarrow\quad & ((A, B) \parallel (C, D) \wedge A \neq B) \vee (C = D \wedge A = B) \\
\Leftrightarrow\quad & ((-A + B)\gamma = (-C + D)\gamma \wedge A \neq B) \\
& \vee(-C + D = 0 \wedge -A + B = 0) \\
\Leftrightarrow\quad & ((-A + B)\gamma = (-C + D)\gamma \wedge A \neq B) \\
& \vee(-C + D)\gamma = (-A + B)\gamma = 0\gamma \\
\Leftrightarrow\quad & (-A + B)\gamma = (-C + D)\gamma
\end{aligned}$$

Damit gilt für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$:

$$AB = \{(C, D) \in \mathcal{P}^2 \mid (-A + B)\gamma = (-C + D)\gamma\}$$

□

Eine Beispielklasse für schwach affine Gruppenpartitionen,deren zugehörige affine Graphen nicht geometrisch sind, bilden die zyklischen Gruppenpartitionen:

Def. 2.3 $(\mathcal{V}, \gamma)$ *hei×e eine zyklische Gruppenpartition,wenn $\mathcal{V}(+)$ eine beliebige abelsche Gruppe ist und die Abbildung γ folgenderma×en definiert ist:*

$$\gamma := \begin{cases} \mathcal{V} & \rightarrow \quad \mathrm{Pot}\mathcal{V} \\ A & \quad A\gamma = \{-A, A\} \end{cases}$$

Bem. 2.3* *Jede zyklische Gruppenpartition $(\mathcal{V}, \gamma)$ ist eine schwach desarguesche Gruppenpartition.*

Der zu einer zyklischen Gruppenpartition gehörige affine Graph hei×e zyklischer Graph zur Gruppe $\mathcal{V}$.

Ist $\mathcal{V}$ eine Modulo-Gruppe der Ordnung n, so werde der zu ihr gehörige zyklische Graph auch als zyklischer Graph der Ordnung n *bezeichnet.*

Beweis zu **2.3*** : $(\mathcal{V}, \gamma)$ sei eine zyklische Gruppenpartition.
Dann gilt $0\gamma = \{-0, 0\} = \{0\}$.
2.1_ III gilt nach der Definition von γ.
Zu 2.1_ IV:Es gilt für beliebige Elemente $C, C' \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} C\gamma \neq C'\gamma &\succ \{C, -C\} \neq \{C', -C'\} \\ &\succ \{C, -C\} \cap \{C', -C'\} = \emptyset \\ &\succ C\gamma \cap C'\gamma = \emptyset \end{aligned}$$

Zu 2.1_ V:Für beliebige Elemente $A, B \in \mathcal{V}$ gilt:

$$\begin{aligned} (A+B)\gamma &= \{A+B, -(A+B)\} \\ &\subset \{A+B, -A+B, A-B, -A-B\} \\ &= \{A, -A\} + \{B, -B\} \\ &= A\gamma + B\gamma \end{aligned}$$

Damit ist $(\mathcal{V}, \gamma)$ eine schwach desarguesche Gruppenpartition.
□

Die zyklischen Graphen der Ordnungen 5-8 sind im Anhang mit aufgeführt.

Im folgenden soll untersucht werden,unter welchen Bedingungen der von einer schwach desargueschen Gruppenpartition gestiftete affine Graph geometrisch ist.Es wird also untersucht,wann eine schwach desarguesche Gruppenpartition eine affine Geometrie stiften kann.

Def. 2.4 *Eine schwach desarguesche Gruppenpartition* $(\mathcal{V}, \gamma)$ *hei×e eine desarguesche Gruppenpartition,wenn gilt:*

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{V}} A\gamma + A\gamma \subset A\gamma \cup \{0\}$$

Bem. 2.4* *Eine schwach desarguesche Gruppenpartition* $(\mathcal{V}, \gamma)$ *ist genau dann eine desarguesche Gruppenpartition,wenn* $A\gamma \cup \{0\}$ *für alle Elemente* $A \in \mathcal{V}$ *eine Untergruppe von* $\mathcal{V}(+)$ *ist.*

Beweis zu **2.4*** : Angenommen,$(\mathcal{V}, \gamma)$ sei eine desarguesche Gruppenpartition.

Es sei ein Element $A \in \mathcal{V}$ beliebig gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& (A\gamma \cup \{0\}) + (A\gamma \cup \{0\}) \\
= \;& (A\gamma + A\gamma) \cup (\{0\} + A\gamma) \cup (A\gamma + \{0\}) \cup (\{0\} + \{0\}) \\
= \;& (A\gamma + A\gamma) \cup A\gamma \cup \{0\} \\
= \;& (A\gamma \cup \{0\}) \cup A\gamma \cup \{0\} \\
= \;& A\gamma \cup \{0\}
\end{aligned}$$

Damit ist $A\gamma \cup \{0\}$ gegen $+$ abgeschlossen. Damit ist $A\gamma \cup \{0\}$ eine Untergruppe von $\mathcal{V}(+)$.

Sei umgekehrt $(\mathcal{V}, \gamma)$ eine schwach desarguesche Gruppenpartition. Für alle Elemente $A \in \mathcal{V}$ sei $A\gamma \cup \{0\}$ eine Untergruppe von $\mathcal{V}(+)$. Dann gilt

$$A\gamma + A\gamma \subset (A\gamma \cup \{0\}) + (A\gamma \cup \{0\}) \subset A\gamma \cup \{0\}$$

Damit ist $(\mathcal{V}, \gamma)$ eine desarguesche Gruppenpartition.

$\square$

Die Bemerkung 2.4* zeigt, da$\times$ die hier definierten desargueschen Gruppenpartitionen mit den desargueschen Gruppenpartitionen aus der Vorlesung über geometrische Relationenalgebra [2] übereinstimmen.

Satz 2.5 *Der von einer schwach desargueschen Gruppenpartition* $(\mathcal{V}, \gamma)$ *gestiftete affine Graph* $(\mathcal{V}, \|)$ *ist genau dann geometrisch,wenn* $(\mathcal{V}, \gamma)$ *eine desarguesche Gruppenpartition ist.*

Beweis zu **2.5**: Eine schwach desarguesche Gruppenpartition $(\mathcal{V}, \gamma)$ und der von ihr gestiftete affine Graph $(\mathcal{V}, \|)$ seien gegeben. $(\mathcal{V}, \mathcal{R}) = (\mathcal{V}, \|)\alpha$ sei das zu $(\mathcal{V}, \|)$ gehörige graphische Relativ.

$(\mathcal{V}, \gamma)$ sei nun sogar eine desarguesche Gruppenpartition. Es seien Punkte $A, B \in \mathcal{V}$ beliebig vorgegeben.Dann gilt für alle Punkte $C, D \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}
& C\,AB \circ AB\,D \\
\succ \;& \bigvee_{E \in \mathcal{V}} C\,AB\,E \wedge E\,AB\,D \\
\succ \;& \bigvee_{E \in \mathcal{V}} (-A + B)\gamma = (-C + E)\gamma = (-E + D)\gamma \qquad \text{nach 2.2*} \\
\succ \;& \bigvee_{E \in \mathcal{V}} -C + E + (-E + D) \in (-A + B)\gamma + (-A + B)\gamma \\
\succ \;& -C + D \in (-A + B)\gamma \cup \{0\} \\
\succ \;& C\,AB\,D \vee C = D
\end{aligned}$$

Damit gilt $AB \circ AB \subset AB \cup O$ im graphischen Relativ $(\mathcal{V}, \mathcal{R})$ für beliebige Relationen $AB \in \mathcal{R}$. Damit sind alle Relationen in $\mathcal{R}$ alternierend. Der affine Graph $(\mathcal{V}, \|)$ ist also geometrisch.

Sei umgekehrt der affine Graph $(\mathcal{V}, \|)$ als geometrisch vorausgesetzt. Ein Punkt $A \in \mathcal{V}$ sei beliebig vorgegeben.Dann gilt für alle Punkte $B \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}
B \in A\gamma + A\gamma \quad & \succ \quad \bigvee_{C,D \in A\gamma} B = C + D \\
& \succ \quad \bigvee_{C,D \in \mathcal{V}} -C + B = D \in A\gamma \wedge C \in A\gamma \\
& \succ \quad \bigvee_{C \in \mathcal{V}} -C + B \in A\gamma \wedge C \in A\gamma \\
& \succ \quad \bigvee_{C \in \mathcal{V}} -C + B \in (-0 + A)\gamma \wedge -0 + C \in (-0 + A)\gamma \\
& \succ \quad \bigvee_{C \in \mathcal{V}} C\, 0A\, B \wedge 0\, 0A\, C \\
& \succ \quad 0\, 0A \circ 0A\, B \\
& \succ \quad 0\, (0A \cup O)\, B \\
& \succ \quad 0\, 0A\, B \vee B = 0 \\
& \succ \quad -0 + B \in (-0 + A)\gamma \vee B = 0 \\
& \succ \quad B \in A\gamma \cup \{0\}
\end{aligned}$$

Damit gilt $A\gamma + A\gamma \subset A\gamma \cup \{0\}$ für beliebige Elemente $A \in \mathcal{V}$.

$(\mathcal{V}, \gamma)$ ist also eine desarguesche Gruppenpartition.

□

2_ II Formulierung des kleinen affinen Satzes von Desargues

Der kleine affine Satz von Desargues auf affinen Geometrien kann nach [2] folgenderma×en formuliert werden:

Def. 2.6 *Es sei eine affine Geometrie* $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|)$ *gegeben.Man sagt, die affine Geometrie* $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|)$ erfüllt den kleinen affinen Satz von Desargues,*wenn gilt:*

$t_i \in \mathcal{G}$ *mit* $i = 1, 2, 3$ *seien drei paarweise verschiedene parallele Geraden der affinen Geometrie* $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|)$. *Es seien ferner auf jeder Geraden zwei Punkte* $A_i \neq B_i \in t_i$ *so gegeben,da× gilt:*

$$g_{A_1A_2} \| g_{B_1B_2} \wedge g_{A_2A_3} \| g_{B_2B_3}$$

Dann mu× auch gelten:

$$g_{A_1A_3} \| g_{B_1B_3}$$

Nach [2] erfüllen bis auf Isomorphie genau die affinen Geometrien den kleinen affinen Satz von Desargues,die von desargueschen Gruppenpartitionen gestiftet werden.

Im folgenden soll eine erweiterte Fassung des kleinen affinen Satzes von Desargues für affine Graphen formuliert werden.Dabei sollen—analog zu den Verhältnissen bei affinen Geometrien—die durch schwach desarguesche Gruppenpartitionen gestifteten affinen Graphen bis auf Isomorphie genau die sein, die diesen erweiterten kleinen affinen Satz von Desargues erfüllen.

Kann diese Aufgabe gelöst werden,so ist nach Satz 2.5 die so erweiterte Fassung,falls sie auf einen geometrischen affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$ angewandt wird,genau dann erfüllt,wenn $(\mathcal{P}, \|)$ bis auf Isomorphie von einer desargueschen Gruppenpartition gestiftet werden kann.

Der so gefundene kleine affine Satz von Desargues auf affinen Graphen ist damit,auf geometrische affine Graphen angewandt, dem ursprünglichen kleinen affinen Satzes von Desargues für affine Geometrien gleichwertig.

Im folgenden soll die Konstruktion eines solchen Satzes versucht werden. Da in der Terminologie der affinen Graphen der Begriff der Geraden im allgemeinen nicht zur Verfügung steht,wird versucht,den kleinen Satz von Desargues über den Begriff des Parallelogramms zu definieren.

Um das sinnvoll tun zu können,mu× die Eindeutigkeit von Parallelogrammen sichergestellt werden.Im allgemeinen ist diese Eindeutigkeit bei affinen Graphen nicht gegeben(siehe 1.6,1.7). Um eine Art von Eindeutigkeit trotzdem sicherzustellen,wird folgende Hilfsdefinition getroffen:

Def. 2.7 $(\mathcal{P}, \|)$ *sei ein affiner Graph. Eine Abbildung*

$$\sigma := \begin{cases} \mathcal{P}^3 & \to & \mathcal{P} \\ (A, B, C) & & (A, B, C)\sigma \end{cases}$$

hei×e eine Parallelogrammabbildung auf $(\mathcal{P}, \|)$*,wenn gilt:*

I. *Für alle Punkte* $A \neq B \neq C \in \mathcal{P}$ *ist der Punkt* $(A, B, C)\sigma$ *ein Parallelogrammschlu× zum Punktetripel (A,B,C).*

II. $\bigwedge\limits_{A,B \in \mathcal{P}} (A, A, B)\sigma = B$

III. $\bigwedge\limits_{A,B,C \in \mathcal{P}} (A, B, C)\sigma = (C, B, A)\sigma$

IV. $\bigwedge\limits_{A,B,C \in \mathcal{P}} (B, C, (A, B, C)\sigma)\sigma = A$

Für beliebige Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ hei×e das Quadrupel $(A, B, C, (A, B, C)\sigma)$ ein σ-Parallelogramm.

Die Menge aller σ-Parallelogramme auf $(\mathcal{P}, \|)$ werde mit

$$\Pi_\sigma := \{(A, B, C, D) \in \mathcal{P}^4 \mid D = (A, B, C)\sigma\}$$

bezeichnet.

Durch diese Definition wird versucht,eine Teilmenge Π_σ der Menge aller Parallelogramme Π auf einem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$ so auszuzeichnen,da× in ihr die Eindeutigkeit des Parallelogrammschlusses gilt.

Bem. 2.7* *Auf einem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$ gilt für alle Punkte $A, B, C, D \in \mathcal{P}$:*

$$\begin{aligned}(A, B, C, D) \in \Pi_\sigma \quad &\succ \quad (B, C, D, A), (C, B, A, D) \in \Pi_\sigma \\ &\succ \quad (C, D, A, B), (D, A, B, C) \in \Pi_\sigma \\ &\quad\quad \wedge (B, A, D, C), (A, D, C, B), (D, C, B, A) \in \Pi_\sigma\end{aligned}$$

Es sind also für ein gegebenes σ-Parallelogramm sämtliche Permutationen, die sich durch Drehung oder Spiegelung des Parallelogramms ergeben, ebenfalls σ-Parallelogramme.

Beweis zu **2.7*** : Es sei ein σ-Parallelogramm $(A, B, C, D) \in \Pi_\sigma$ gegeben.Dann gilt:

$$\begin{aligned}D = (A, B, C)\sigma \quad &\succ \quad (B, C, D)\sigma = (B, C, (A, B, C)\sigma)\sigma = A \quad \text{nach 2.7\_ IV} \\ &\succ \quad (B, C, D, A) \in \Pi_\sigma\end{aligned}$$

Au×erdem gilt:

$$\begin{aligned}D = (A, B, C)\sigma \quad &\succ \quad D = (C, B, A)\sigma \qquad \text{nach 2.7\_ III} \\ &\succ \quad (C, B, A, D) \in \Pi_\sigma\end{aligned}$$

Damit sind die beiden ersten Permutationen aus 2.7* bewiesen.

Ein σ-Parallelogramm kann damit gedreht und gespiegelt werden.

Die restlichen Permutationen aus 2.7* können damit durch mehrmalige Anwendung der beiden ersten erzeugt werden.

□

Zur Vereinfachung der Arbeit mit σ-Parallelogrammen auf graphischen Relativen wird au×erdem das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 2.7** *Ist (A, B, C, D) ein σ-Parallelogramm auf einem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$,so gilt im zugehörigen graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$:*

$$AB = CD \wedge BC = AD$$

Beweis zu **2.7**** : Es sei ein σ-Parallelogramm (A, B, C, D) auf $(\mathcal{P}, \|)$ gegeben. Für $A \neq B \neq C$ ist (A, B, C, D) nach 2.7_- I ein Parallelogramm. Damit gilt:

$$(A, B) \| (C, D) \wedge (B, C) \| (A, D) \succ AB = CD \wedge BC = AD$$

Ist $A = B$ so gilt nach 2.7_- II $C = D$.Damit gilt:

$$AB = AA = CC = CD \wedge BC = AD$$

Ist $B = C$,so ist,da nach 2.7* $(B, C, D, A) \in \Pi_\sigma$ gilt, nach 2.7_- II $A = D$. Damit gilt:

$$AB = CD \wedge BC = BB = AA = AD$$

Damit gilt in jedem Fall $AB = CD \wedge BC = AD$.

□

Unter Zuhilfename des Begriffes der σ-Parallelogramme kann nun der kleine affine Satz von Desargues für affine Graphen folgenderma×en formuliert werden:

Def. 2.8 *Man sagt,ein affiner Graph $(\mathcal{P}, \|)$ erfülle den* kleinen affinen Satz von Desargues,*wenn es eine Parallelogrammabbildung σ auf $(\mathcal{P}, \|)$ gibt,für die gilt: Für alle Punkte $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 \in \mathcal{P}$ gilt:*

$$(A_1, B_1, B_2, A_2) \in \Pi_\sigma \wedge (A_2, B_2, B_3, A_3) \in \Pi_\sigma \succ (A_1, B_1, B_3, A_3) \in \Pi_\sigma$$

$\boxed{A_1}$ $\boxed{B_1}$

$\boxed{A_2}$ $\boxed{B_2}$

$\boxed{A_3}$ $\boxed{B_3}$

Es wir zunächst gezeigt,da× die affinen Graphen,die von schwach desarguesschen Gruppenpartitionen erzeugt werden,dieser Fassung des kleinen affinen Satzes von Desargues genügen.

Satz 2.9 *Ist $(\mathcal{V}, \gamma)$ eine schwach desarguesche Gruppenpartition und ist $(\mathcal{V}, \|)$ der von ihr gestiftete affine Graph, so erfüllt $(\mathcal{V}, \|)$ den kleinen affinen Satz von Desargues.*

Beweis zu **2.9**: Es wird eine Parallelogrammabbildung σ gesucht,die den Bedingungen des kleinen affinen Satzes von Desargues genügt.

Betrachte die folgende Abbildung:

$$\sigma := \begin{cases} \mathcal{V}^3 & \to & \mathcal{V} \\ (A,B,C) & & (A,B,C)\sigma = A - B + C \end{cases}$$

Es wird zunächst gezeigt,da× σ eine Parallelogrammabbildung ist.

Zu 2.7_ I: Es seien Punkte $A \neq B \neq C \in \mathcal{V}$ beliebig gegeben. Weiterhin werde der Punkt $D \in \mathcal{V}$ folgenderma×en definiert:

$$D := A - B + C = (A,B,C)\sigma$$

Dann gilt: $0 \neq A - B = A - B + C - C = D - C$

Weiterhin gilt: $0 \neq C - B = C - B + A - A = A - B + C - A = D - A$

Damit gilt in in der desargueschen Gruppenpartition $(\mathcal{V},\gamma)$:

$$(A - B)\gamma = (D - C)\gamma \neq \{0\} \wedge (C - B)\gamma = (D - A)\gamma \neq \{0\}$$

Damit gilt auf dem affinen Graphen $(\mathcal{V},\|)$:

$$(B,A) \parallel (C,D) \wedge (B,C) \parallel (D,A)$$

Damit ist $D = (A,B,C)\sigma$ ein Parallelogrammschlu× zum Tripel (A,B,C).

Zu 2.7_ II: $\bigwedge\limits_{A,B\in\mathcal{V}} (A,A,B)\sigma = A - A + B = B$

Zu 2.7_ III: $\bigwedge\limits_{A,B,C\in\mathcal{V}} (A,B,C)\sigma = A - B + C = C - B + A = (C,B,A)\sigma$

Zu 2.7_ IV: $\bigwedge\limits_{A,B,C\in\mathcal{V}} (B,C,(A,B,C)\sigma)\sigma = B - C + (A - B + C) = A$

Damit ist σ eine Parallelogrammabbildung.

Es seien nun Punkte $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 \in \mathcal{V}$ beliebig gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& (A_1,B_1,B_2,A_2) \in \Pi_\sigma \wedge (A_2,B_2,B_3,A_3) \in \Pi_\sigma \\
\succ\ & (A_1,B_1,B_2)\sigma = A_2 \wedge (A_2,B_2,B_3)\sigma = A_3 \\
\succ\ & A_1 - B_1 + B_2 = A_2 \wedge A_2 - B_2 + B_3 = A_3 \\
\succ\ & A_3 = (A_1 - B_1 + B_2) - B_2 + B_3 = A_1 - B_1 + B_3 \\
\succ\ & (A_1,B_1,B_3)\sigma = A_3 \\
\succ\ & (A_1,B_1,B_3,A_3) \in \Pi_\sigma
\end{aligned}$$

Damit gilt auf $(\mathcal{V},\|)$ der kleine affine Satz von Desargues unter der Parallelogrammabbildung σ.

□

Noch zu zeigen ist die umgekehrte Richtung: Zu jedem affinen Graphen,der den kleinen affinen Satz von Desargues erfüllt,gibt es eine schwach affine Gruppenpartition, die diesen affinen Graphen bis auf Isomorphie stiftet.

Um diese Richtung beweisen zu können,wird zunächst der Begriff der *Translation* auf einem affinen Graphen, der den kleinen affinen Satz von Desargues erfüllt,definiert und untersucht.

2_ III Translationen auf desargueschen affinen Graphen

Im folgenden sei $(\mathcal{P}, \|)$ ein affiner Graph,der den kleinen affinen Satz von Desargues erfüllt.σ sei eine Parallelogrammabbildung, unter der $(\mathcal{P}, \|)$ diesen Satz erfüllt.

Dann kann eine Translation auf dem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$ folgenderma×en definiert werden:

Def. 2.10 *Eine Abbildung*

$$\tau := \begin{cases} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ A & & A\tau \end{cases}$$

hei×e eine Translation auf $(\mathcal{P}, \|)$,*wenn* $(A, B, B\tau, A\tau)$ *für alle Punkte* $A, B \in \mathcal{P}$ *ein* σ*-Parallelogramm ist.*

Die Menge aller Translationen auf $(\mathcal{P}, \|)$ *werde mit* Θ *bezeichnet.*

Bem. 2.10* *Jede Translation* τ *auf* $(\mathcal{P}, \|)$ *ist eine Bijektion.*

Beweis zu **2.10*** : $\tau \in \Theta$ sei eine beliebige Translation auf dem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$.

Es sei ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ beliebig,aber fest gewählt.Dann gilt für alle Punkte $B \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} & (A\tau, A, (B, A\tau, A)\sigma)\,\sigma = B \quad \text{nach2.7\_ IV} \\ \succ \quad & ((B, A\tau, A)\sigma, A, A\tau)\,\sigma = B \quad \text{nach2.7\_ III} \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach 2.10 für alle Punkte $B \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} & ((B, A\tau, A)\sigma, A, A\tau, ((B, A\tau, A)\sigma)\,\tau) \in \Pi_\sigma \\ \succ \quad & ((B, A\tau, A)\sigma, A, A\tau)\,\sigma = ((B, A\tau, A)\sigma)\,\tau \end{aligned}$$

Damit gilt für alle Punkte $B \in \mathcal{P}$: $B = ((B, A\tau, A)\sigma)\,\tau$.

Damit ist τ surjektiv.

Es seien nun Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben. Dann ist $(A, B, B\tau, A\tau)$ und damit nach 2.7* auch $(B\tau, A\tau, A, B)$ ein σ-Parallelogramm.

Damit gilt: $(B\tau, A\tau, A)\sigma = B$

Nach 2.7$_-$ II gilt dann: $B\tau = A\tau \succ A = B$

Damit ist τ auch injektiv.

τ ist also eine Bijektion.

□

Die Menge Θ aller Translationen auf dem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$ soll im folgenden zu einer schwach desargueschen Gruppenpartition erweitert werden.

Dazu wird Θ zunächst zu einer abelschen Gruppe erweitert.

Satz 2.11 $(\Theta, \circ)$ *ist eine abelsche Gruppe mit* ι *als neutralem Element.Dabei bezeichne* $\circ$ *das Hintereinanderausführen von Funktionen.* ι *bezeichne die Identitätsfunktion.*

Beweis zu **2.11**: Die Menge aller Bijektionen auf $\mathcal{P}$ ist bezüglich $\circ$ eine Gruppe.

Da Θ eine Teilmenge der Menge aller Bijektionen auf $\mathcal{P}$ ist,mu× gezeigt werden,da× Θ bezüglich $\circ$ und bezüglich der Inversion abgeschlossen ist.

Um zu zeigen,da× die Gruppe $(\Theta, \circ)$ abelsch ist,mu× weiterhin gezeigt werden,da× $\circ$ kommutativ ist.

Zunächst wird die Abgeschlossenheit der Translationen Θ gegen $\circ$ gezeigt:

Es seien Translationen $\tau_1, \tau_2 \in \Theta$ beliebig vorgegeben. Dann gilt für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$:

$$(A, B, B\tau_1, A\tau_1), (A\tau_1, B\tau_1, (B\tau_1)\tau_2, (A\tau_1)\tau_2) \in \Pi_\sigma$$

Damit gilt nach dem kleinen affinen Satz von Desargues:

$$(A, B, B(\tau_1 \circ \tau_2), A(\tau_1 \circ \tau_2)) = (A, B, (B\tau_1)\tau_2, (A\tau_1)\tau_2) \in \Pi_\sigma$$

Damit ist $\tau_1 \circ \tau_2$ ebenfalls eine Translation.Θ ist also bezüglich $\circ$ abgeschlossen.

Es sei nun eine Translation $\tau \in \Theta$ beliebig vorgegeben.

Betrachte die zu τ inverse Relation τ^{-1}.

Es gilt für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ $(A\tau^{-1}, B\tau^{-1}, B, A) \in \Pi_\sigma$.

Damit gilt nach 2.7* auch: $(A, B, B\tau^{-1}, A\tau^{-1}) \in \Pi_\sigma$.

Damit ist auch τ^{-1} eine Translation.Θ ist also bezüglich der Inversion abgeschlossen.

$(\Theta, \circ)$ ist damit eine Untergruppe der Bijektionen auf $\mathcal{P}$.

Es seien nun wiederum Translationen $\tau_1, \tau_2 \in \Theta$ vorgegeben.

Dann gilt für alle Punkte $A \in \mathcal{P}$: $(A\tau_1, A, A\tau_2, A(\tau_1 \circ \tau_2)) \in \Pi_\sigma$

Nach 2.7* gilt damit auch: $(A\tau_2, A, A\tau_1, A(\tau_1 \circ \tau_2)) \in \Pi_\sigma$

Weiterhin gilt $(A\tau_2, A, A\tau_1, A(\tau_2 \circ \tau_1)) \in \Pi_\sigma$

Wegen der Eindeutigkeit der σ-Parallelogramme mu× damit gelten:

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{P}} A(\tau_1 \circ \tau_2) = A(\tau_2 \circ \tau_1)$$

Damit gilt: $\bigwedge\limits_{\tau_1,\tau_2\in\Theta} \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$.

Damit ist die Gruppe $(\Theta, \circ)$ abelsch.

□

Weiterhin gilt für die Menge der Translationen Θ auf $(\mathcal{P}, \|)$:

Satz 2.12 *Die Translationen operieren scharf einfach transitiv auf* $(\mathcal{P}, \|)$. *Es gilt also:*

$$\bigwedge_{A,B\in\mathcal{P}} \bigvee_{\tau\in\Theta}^{1} A\tau = B$$

Diese eindeutig zu A *und* B *bestimmte Translation* τ *werde im folgenden mit* $\tau_{A,B}$ *bezeichnet.*

Beweis zu **2.12**: Es seien Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.Betrachte die Abbildung:

$$\tau_{A,B} := \begin{cases} \mathcal{P} & \rightarrow \qquad \mathcal{P} \\ C & \qquad C\tau_{A,B} = (C, A, B)\sigma \end{cases}$$

Zunächst wird gezeigt,da× $\tau_{A,B}$ eine Translation ist. Dazu ist nachzuweisen:

$$\bigwedge_{C,D\in\mathcal{P}} (C, D, D\tau_{A,B}, C\tau_{A,B}) \in \Pi_\sigma$$

Es seien Punkte $C, D \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} & (C, A, B, (C, A, B)\sigma)\,, (D, A, B, (D, A, B)\sigma) \in \Pi_\sigma & \\ \succ & (C, A, B, C\tau_{A,B}), (D, A, B, D\tau_{A,B}) \in \Pi_\sigma & \\ \succ & (C, C\tau_{A,B}, B, A), (A, B, D\tau_{A,B}, D) \in \Pi_\sigma & \text{nach2.7*} \\ \succ & (C, C\tau_{A,B}, D\tau_{A,B}, D) \in \Pi_\sigma & \text{nach Desargues} \\ \succ & (C, D, D\tau_{A,B}, C\tau_{A,B}) \in \Pi_\sigma & \text{nach 2.7*} \end{array}$$

Damit ist $\tau_{A,B}$ eine Translation auf $(\mathcal{P}, \|)$.

Au×erdem gilt $A\tau_{A,B} = (A, A, B)\sigma = B$.

Damit ist $\tau_{A,B}$ eine Translation auf dem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$, die $A\tau_{A,B} = B$ erfüllt.Die Existenz einer solchen Translation ist damit nachgewiesen.

Es mu× noch gezeigt werden,da× $\tau_{A,B}$ die einzige Translation auf Θ ist,die diese Bedingung erfüllt.

Es sei $\tilde{\tau}_{A,B} \in \Theta$ eine weitere Translation mit $A\tilde{\tau}_{A,B} = B$.

Dann mu× $(C, A, A\tilde{\tau}_{A,B}, C\tilde{\tau}_{A,B})$ für alle Punkte $C \in \mathcal{P}$ ein σ-Parallelogramm sein.

Es mu× also für alle Punkte $C \in \mathcal{P}$ gelten:

$C\tilde{\tau}_{A,B} = (C, A, A\tilde{\tau}_{A,B})\sigma = (C, A, B)\sigma = C\tau_{A,B}$

Damit gilt $\tilde{\tau}_{A,B} = \tau_{A,B}$.

Die Translation $\tau_{A,B}$ ist also eindeutig.

□

Die abelsche Gruppe $(\Theta, \circ)$ kann nun auf folgende Weise zu einer schwach desargueschen Gruppenpartition ergänzt werden:

Satz 2.13 (Θ, γ) *mit*

$$\gamma := \begin{cases} \Theta & \rightarrow \quad \mathrm{Pot}\Theta \\ \tau & \quad \tau\gamma := \{\tau' \in \Theta \mid \bigwedge_{A \in \mathcal{P}} AA\tau = AA\tau'\} \\ & \end{cases}$$

ist eine schwach desarguesche Gruppenpartition. Dabei seien $AA\tau$ und $AA\tau'$ die entsprechenden Relationen auf dem zu dem affinen Graphen gehörigen graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$.

Zur Vereinfachung des Beweises von 2.13 wird zunächst das folgende Lemma gezeigt:

Lemma 2.13* *Für beliebige Translationen $\tau, \tau' \in \Theta$ gilt:*

$$\bigvee_{A,B \in \mathcal{P}} AA\tau = BB\tau' \Longleftrightarrow \bigwedge_{C,D \in \mathcal{P}} CC\tau = DD\tau'$$

Damit gilt für jede Translation $\tau \in \Theta$:

$$\tau\gamma = \{\tau' \in \Theta \mid \bigvee_{A,B \in \mathcal{P}} AA\tau = BB\tau'\}$$

Beweis zu **2.13*** : Es seien Translationen $\tau, \tau' \in \Theta$ und es seien Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ beliebig gewählt. Für alle Punkte $C, D \in \mathcal{P}$ gilt dann nach 2.7** :

$(C, A, A\tau, C\tau), (B, D, D\tau', B\tau') \in \Pi_\sigma \succ CC\tau = AA\tau \wedge BB\tau' = DD\tau'$

Damit gilt:

$$\bigvee_{A,B \in \mathcal{P}} AA\tau = BB\tau' \Longrightarrow \bigwedge_{C,D \in \mathcal{P}} CC\tau = DD\tau'$$

Die umgekehrte Richtung ist wegen $\mathcal{P} \neq \emptyset$ trivial.

□

Mit Hilfe des Lemmas 2.13* kann nun der Satz 2.13 bewiesen werden.

Beweis zu **2.13**: $(\Theta, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe.Für ihr Nullelement ι gilt:

$$\begin{aligned}(\iota)\gamma &= \{\tau \in \Theta \mid \bigwedge_{A\in\mathcal{P}} AA\iota = AA\tau\} \\ &= \{\tau \in \Theta \mid \bigwedge_{A\in\mathcal{P}} AA = O = AA\tau\} \\ &= \{\tau \in \Theta \mid \bigwedge_{A\in\mathcal{P}} A = A\tau\} \\ &= \{\iota\}\end{aligned}$$

Um zu zeigen,da× (Θ, γ) eine schwach desarguesche Gruppenpartition ist, müssen damit nur noch die Bedingungen 2.1_ III—2.1_ V nachgewiesen werden.

Zu 2.1_ III:Es sei eine Translation $\tau \in \Theta$ beliebig gegeben.

$\tau \in \tau\gamma$ gilt,da $AA\tau = AA\tau$ für beliebige $A \in \mathcal{P}$ gilt.

Ferner gilt für beliebige Punkte $A \in \mathcal{P}$:

$$(A, A\tau^{-1}, A, A\tau) \in \Pi_\sigma \succ AA\tau^{-1} = AA\tau \succ \tau^{-1} \in \tau\gamma$$

Damit gilt $\bigwedge_{\tau\in\Theta} \tau, \tau^{-1} \in \tau\gamma$.

Zu 2.1_ IV:Es seien Translationen $\tau, \tau_1, \tau_2 \in \Theta$ beliebig gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\tau \in \tau_1\gamma \cap \tau_2\gamma &\succ \bigwedge_{A\in\mathcal{P}} AA\tau = AA\tau_1 \wedge AA\tau = AA\tau_2 \\ &\succ \bigwedge_{A\in\mathcal{P}} AA\tau_1 = AA\tau_2 \\ &\succ \tau_1\gamma = \tau_2\gamma\end{aligned}$$

Zu 2.1_ V:Es seien Translationen $\tau, \tau_1, \tau_2 \in \Theta$ so gegeben,da× $\tau \in (\tau_1 \circ \tau_2)\gamma$ gilt.

Ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ werde beliebig gewählt.

Dann gilt

$$\begin{aligned}& AA\tau = AA(\tau_1 \circ \tau_2) \subset AA\tau_1 \circ A\tau_1 A(\tau_1 \circ \tau_2) \\ \succ\ & A\ (AA\tau_1 \circ A\tau_1(A\tau_1)\tau_2)\ A\tau \\ \succ\ & \bigvee_{B\in\mathcal{P}} AB = AA\tau_1 \wedge BA\tau = A\tau_1(A\tau_1)\tau_2\end{aligned}$$

Nach 2.12 existiert die Translation $\tau_{A,B} \in \Theta$ mit $A\tau_{A,B} = B$.

Da $AB = AA\tau_1$ gilt,gilt $\tau_{A,B} \in \tau_1\gamma$.

Au×erdem gilt

$$BB(\tau_{A,B}^{-1} \circ \tau) = B(B\tau_{A,B}^{-1})\tau = BA\tau = A\tau_1(A\tau_1)\tau_2$$

Nach 2.13* gilt damit $\tau_{A,B}^{-1} \circ \tau \in \tau_2\gamma$.

Damit gilt: $\tau = \tau_{A,B} \circ (\tau_{A,B}^{-1} \circ \tau) \in \tau_1\gamma \circ \tau_2\gamma$.

Damit ist 2.1₋ V nachgewiesen.

Damit ist (Θ, γ) eine schwach desarguesche Gruppenpartition.

□

Mit Hilfe der schwach desargueschen Gruppenpartition der Translationen aus Satz 2.13 können nun die affinen Graphen,die den kleinen affinen Satz von Desargues erfüllen und die schwach desargueschen Gruppenpartitionen folgenderma×en aufeinander bezogen werden:

Satz 2.14 *Die Klasse der schwach desargueschen Gruppenpartitionen und die Klasse der affinen Graphen,die den kleinen affinen Satz von Desargues erfüllen,sind durch die Verfahren aus 2.2 und 2.13 synonym aufeinander bezogen.Es gilt also:*

2.14.1 *Ist $(\mathcal{V}, \gamma)$ eine schwach desarguesche Gruppenpartition, $(\mathcal{V}, \|)$ der von ihr gestiftete affine Graph,der den kleinen affinen Satz von Desargues mit der Parallellogrammabbildung σ aus 2.9 erfüllt, und ist (Θ, γ_τ) die wiederum von diesem affinen Graphen gestiftete schwach desarguesche Gruppenpartition der Translationen auf $(\mathcal{V}, \|)$,so gilt:*

$$(\mathcal{V}, \gamma) \simeq (\Theta, \gamma_\tau)$$

2.14.2 *Ist $(\mathcal{P}, \|)$ ein affiner Graph,in dem der kleine affine Satz von Desargues gilt, (Θ, γ_τ) die von ihm gestiftete schwach desarguesche Gruppenpartition der Translationen auf $(\mathcal{P}, \|)$ und $(\Theta, \|_\tau)$ der von dieser Gruppenpartition gestiftete affine Graph,so gilt:*

$$(\mathcal{P}, \|) \simeq (\Theta, \|_\tau)$$

Beweis zu **2.14.1**: Betrachte die Abbildung

$$\delta := \begin{cases} \mathcal{V} & \to & \Theta \\ A & & A\delta := \tau_{0A} \end{cases}$$

Dabei bezeichne 0 das Nullelement der Gruppe $(\mathcal{V}, +)$.

Nach 2.12 ist δ eine Bijektion.

Ferner gilt für alle Elemente $A, B \in \mathcal{V}$:

$$\begin{array}{rcll} 0(\tau_{0,A} \circ \tau_{0,B}) & = & A\tau_{0,B} & \\ & = & (A, 0, B)\sigma & \text{nach 2.12} \\ & = & A - 0 + B & \text{nach 2.9} \\ & = & A + B & \\ & = & 0\tau_{0,A+B} & \end{array}$$

Damit mu× wegen der Eindeutigkeit von $\tau_{0,A+B}$ $\tau_{0,A+B} = \tau_{0,A} \circ \tau_{0,B}$ gelten.

Damit gilt

$$(A+B)\delta = \tau_{0(A+B)} = \tau_{0A} \circ \tau_{0B} = A\delta \circ B\delta$$

Damit ist die Bijektion δ ist ein Gruppenisomorphismus der Gruppe $(\mathcal{V},+)$ auf die Translationsgruppe $(\Theta,\circ)$.

$(\mathcal{V},\mathcal{R}) = (\mathcal{V},\|)\alpha$ sei nun das zum affinen Graphen $(\mathcal{V},\|)$ gehörige graphische Relativ.

Dann gilt für alle Elemente $A \in \mathcal{V}$:

$$\begin{array}{rcll} (A\delta)\gamma_\tau & = & \{\tau \in \Theta \mid 00\tau = 00\tau_{0,A}\} & \text{nach 2.13*} \\ & = & \{\tau_{0B} \in \Theta \mid 0B = 0A\} & \text{nach 2.12} \\ & = & \{\tau_{0B} \in \Theta \mid B - 0 \in (A-0)\gamma\} & \text{nach 2.2*} \\ & = & \{\tau_{0B} \in \Theta \mid B \in A\gamma\} & \\ & = & (A\gamma)\delta & \end{array}$$

Damit gilt $\bigwedge\limits_{A\in\mathcal{P}} A\gamma\delta = A\delta\gamma_\tau$.

Damit gilt $(\mathcal{V},\gamma) \simeq (\Theta,\gamma_\tau)$ unter dem Isomorphismus δ.

□

Beweis zu **2.14.2**: Betrachte die Abbildung

$$\delta := \begin{cases} \mathcal{P} & \rightarrow \quad \Theta \\ A & \quad A\delta := \tau_{0A} \end{cases}$$

Nach 2.12 ist δ eine Bijektion.

$(\mathcal{P},\mathcal{R}) = (\mathcal{P},\|)\alpha$ sei das zum affinen Graphen $(\mathcal{P},\|)$ gehörige graphische Relativ.

Es seien Punkte $A \neq B \in \mathcal{P}$ und Punkte $C \neq D \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} (\tau_{0,A},\tau_{0,B}) \parallel_\tau (\tau_{0,C},\tau_{0,D}) & \asymp & (\tau_{0,A}^{-1} \circ \tau_{0,B}) \in (\tau_{0,C}^{-1} \circ \tau_{0,D})\gamma & \\ & \asymp & \tau_{A,B} \in (\tau_{C,D})\gamma & \\ & \asymp & AA\tau_{AB} = CC\tau_{CD} & \text{nach 2.13*} \\ & \asymp & AB = CD & \\ & \asymp & (A,B) \parallel (C,D) & \end{array}$$

Damit gilt $(\mathcal{P},\|) \simeq (\Theta, \|_\tau)$ unter dem Isomorphismus δ.

□

Die Synonymität der schwach desargueschen Gruppenpartitionen und der affinen Graphen,die den kleinen affinen Satz von Desargues erfüllen, ist damit nachgewiesen.

Der kleine affine Satz von Desargues für affine Graphen kann damit als eine Verallgemeinerung des kleinen affinen Satzes von Desargues für affine Geometrien angesehen werden.

3 Unterstrukturen affiner Graphen

3_ I Unterräume auf affinen Graphen

Wie der kleine affine Satz von Desargues kann auch der Begriff des Unterraumes auf affinen Geometrien,so wie er in [2] gegeben ist,auf affine Graphen übertragen werden.Unterräume auf affinen Graphen können folgendermažen definiert werden:

Def. 3.1 *Ist* $(\mathcal{P}, \|)$ *ein affiner Graph,so heiže eine Teilmenge* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ *mit* $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ *ein* Unterraum von $(\mathcal{P}, \|)$*(in Zeichen:*$\mathcal{Q} < \mathcal{P}$*),wenn gilt:*

$$\bigwedge_{A \neq B \in \mathcal{Q}} \bigwedge_{C \in \mathcal{Q}} \bigwedge_{D \in \mathcal{P}} (A, B) \parallel (C, D) \Longrightarrow D \in \mathcal{Q}$$

Man sieht leicht,daž jeder Unterraum eines affinen Graphen selbst ein affiner Graph ist.

Im zu einem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$ gehörigen graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ kann eine zu dieser Bedingung gleichwertige Forderung formuliert werden:

Satz 3.1* *Eine Teilmenge* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ *mit* $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ *ist genau dann ein Unterraum auf einem affinen Graphen* $(\mathcal{P}, \|)$*,wenn in dem zu* $(\mathcal{P}, \|)$ *gehörigen graphischen Relativ* $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$ *gilt:*

$$\bigwedge_{A,B,C \in \mathcal{Q}} A\,BC \subset \mathcal{Q}$$

Beweis zu **3.1*** : Auf einer Teilmenge $\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ seien Punkte $A, B, C \in \mathcal{Q}$ beliebig vorgegeben. Gilt dann $B \neq C$,so sind folgende Zeilen äquivalent:

$$\begin{aligned}
& \bigwedge_{D \in \mathcal{P}} (B, C) \parallel (A, D) \succ D \in \mathcal{Q} \\
\rtimes \quad & \bigwedge_{D \in \mathcal{P}} BC = AD \succ D \in \mathcal{Q} \\
\rtimes \quad & \bigwedge_{D \in \mathcal{P}} A\,BC\,D \succ D \in \mathcal{Q} \\
\rtimes \quad & A\,BC \subset \mathcal{Q}
\end{aligned}$$

Gilt $B = C$,so gilt $A\,BC = A\,O = \{A\} \subset \mathcal{Q}$.

Damit gilt:

$$\bigwedge_{A \neq B \in \mathcal{Q}} \bigwedge_{C \in \mathcal{Q}} \bigwedge_{D \in \mathcal{P}} (A, B) \parallel (C, D) \Longrightarrow D \in \mathcal{Q} \rtimes \bigwedge_{A,B,C \in \mathcal{Q}} A\,BC \subset \mathcal{Q}$$

Damit gilt $\bigwedge_{A,B,C \in \mathcal{Q}} A\,BC \subset \mathcal{Q}$ genau dann,wenn $\mathcal{Q}$ ein Unterraum von $(\mathcal{P}, \|)$ ist.

□

Die Bedingung aus 3.1* entspricht einer Bedingung aus der Vorlesung zur geometrischen Relationenalgebra [2], nach der eine Teilmenge $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ genau dann ein Unterraum einer affinen Geometrie ist,wenn im zugehörigen affinen Relativ für alle Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ $A, B, C \in \mathcal{Q} \succ ABC \subset \mathcal{Q}$ gilt.

Der Unterraumbegriff auf affinen Graphen kann damit als eine Erweiterung des Unterraumbegriffs auf affinen Geometrien verstanden werden.

Im folgenden wird versucht,den Unterräumen auf affinen Graphen entsprechende Strukturen auf graphischen Relativen zu finden.

Def. 3.2 *Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ ein graphisches Relativ und es sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ eine Teilmenge der Punktmenge $\mathcal{P}$ mit $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. Dann kann eine Relation $\mathcal{Q}^2$ auf $\mathcal{P}$ folgendermažen definiert werden:*

$$\bigcup_{Q_i \in \mathcal{Q}\, i=1,2} Q_1 Q_2 =: \mathcal{Q}^2$$

Bem. 3.2* *Ist $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$ ein Unterraum eines affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$, so gilt im zu $(\mathcal{P}, \|)$ gehörigen graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$:*

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{Q}} \mathcal{Q} = A\mathcal{Q}^2$$

Zum Beweis dieser Bemerkung wird zunächst das folgende Lemma bewiesen.

Lemma 3.2** *Ist $\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ ein beliebige Teilmenge der Punkte auf einem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$, so gilt in dem zu $(\mathcal{P}, \|)$ gehörigen graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$:*

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{Q}} \mathcal{Q} \subset A\mathcal{Q}^2$$

Beweis zu **3.2**** : Es sei ein Punkt $A \in \mathcal{Q}$ auf einer Teilmenge $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben. Dann gilt für alle Punkte $B \in \mathcal{P}$:

$$B \in \mathcal{Q} \succ AB \subset \mathcal{Q}^2 \succ A\,\mathcal{Q}^2\,B \succ B \in A\mathcal{Q}^2$$

Damit gilt $\mathcal{Q} \subset A\mathcal{Q}^2$.

□

Mit Hilfe des Lemmas 3.2** kann nun die Bemerkung 3.2* bewiesen werden.

Beweis zu **3.2*** : $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$ sei ein Unterraum eines affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$. Dann gilt im graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$ für jeden Punkt $A \in \mathcal{Q}$ und für alle Punkte $B \in \mathcal{P}$:

$$\begin{array}{rcll}
B \in A\,\mathcal{Q}^2 & \succ & A\,\mathcal{Q}^2\,B & \\
& \succ & A \bigcup_{Q_i \in \mathcal{Q}\; i=1,2} Q_1 Q_2\,B & \\
& \succ & \bigvee_{Q_1,Q_2 \in \mathcal{Q}} A\,Q_1 Q_2\,B & \\
& \succ & \bigvee_{Q_1,Q_2 \in \mathcal{Q}} AB = Q_1 Q_2 & \\
& \succ & \bigvee_{Q_1,Q_2 \in \mathcal{Q}} B \in A\,Q_1 Q_2 & \\
& \succ & B \in \mathcal{Q} & \text{nach 3.1*}
\end{array}$$

Damit gilt $A\mathcal{Q}^2 \subset \mathcal{Q}$.

Wegen 3.2** gilt dann sogar: $\mathcal{Q} = A\mathcal{Q}^2$.

□

Def. 3.3 *Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ ein graphisches Relativ,so werde mit*

$$\ddot{\mathcal{R}} := \dot{\mathcal{R}} \cap \mathrm{Aequi}\mathcal{P}$$

die Menge aller auf $\mathcal{P}$ abgeschlossenen Žquivalenzrelationen bezeichnet.

Die Unterräume eines affinen Graphen und die abgeschlossenen Žquivalenzrelationen des zu ihm gehörigen graphischen Relativs können nun folgendermažen aufeinander bezogen werden:

Satz 3.3* *Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ ein graphisches Relativ und ist $(\mathcal{P}, \|) = (\mathcal{P}, \mathcal{R})\gamma$ der zu diesem graphischen Relativ gehörige affine Graph,so gilt:*

$$\ddot{\mathcal{R}} = \{\mathcal{Q}^2 \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mid \mathcal{Q} < (\mathcal{P}, \|)\}$$

Beweis zu **3.3*** : Es sei $\mathcal{Q}$ ein Unterraum des affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|) = (\mathcal{P}, \mathcal{R})\gamma$. Nach der Definition 3.2 ist $\mathcal{Q}^2$ als Vereinigung abgeschlossener Relationen abgeschlossen. Es gilt also jedenfalls $\mathcal{Q}^2 \in \dot{\mathcal{R}}$. Nach 1.10* ist die Relation $\mathcal{Q}^2$ damit auch symmetrisch.

Wähle nun einen beliebigen Punkt $A \in \mathcal{Q} \neq \emptyset$.

Dann gilt $A \in \mathcal{Q} \succ O = AA \subset \mathcal{Q}^2$

Damit ist $\mathcal{Q}^2$ auch reflexiv.

Um die Transitivität von $\mathcal{Q}^2$ zu beweisen,muž gezeigt werden,daž $\mathcal{Q}^2 \circ \mathcal{Q}^2 \subset \mathcal{Q}^2$ gilt.

Ein Punkt $A \in \mathcal{Q}$ sei fest vorgegeben. Dann gilt für alle Punkte $B \in \mathcal{P}$:

$$
\begin{array}{lll}
B \in A\,\mathcal{Q}^2 \circ \mathcal{Q}^2 & \succ \bigvee\limits_{C \in \mathcal{P}} C \in A\,\mathcal{Q}^2 \wedge B \in C\,\mathcal{Q}^2 & \\
& \succ \bigvee\limits_{C \in \mathcal{P}} C \in \mathcal{Q} \wedge B \in C\,\mathcal{Q}^2 & \text{nach } 3.2^* \\
& \succ B \in \mathcal{Q} = A\,\mathcal{Q}^2 & \text{nach } 3.2^*
\end{array}
$$

Damit gilt $A\,\mathcal{Q}^2 \circ \mathcal{Q}^2 \subset A\,\mathcal{Q}^2$.

Damit gilt nach der Kürzungsregel 1.9$_-$ I auch $\mathcal{Q}^2 \circ \mathcal{Q}^2 \subset \mathcal{Q}^2$.

$\mathcal{Q}^2$ ist also eine Žquivalenzrelation.

Damit gilt $\mathcal{Q}^2 \in \ddot{\mathcal{R}}$.

Es sei umgekehrt eine abgeschlossene Žquivalenzrelation $\mathcal{U} \in \ddot{\mathcal{R}}$ beliebig vorgegeben.Es wird ein Unterraum $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$ gesucht,für den $\mathcal{U} = \mathcal{Q}^2$ gilt.

Ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ sei beliebig vorgegeben. Dann gilt für alle Punkte $B, C, D \in \mathcal{P}$:

$$
\begin{array}{lll}
& B, C, D \in A\mathcal{U} & \\
\succ & A\mathcal{U}\,C \wedge A\mathcal{U}\,D \wedge A\mathcal{U} = B\mathcal{U} & \mathcal{U} \text{ ist eine Žquivalenzrelation} \\
\succ & C\,\mathcal{U}\,D \wedge A\mathcal{U} = B\mathcal{U} & \mathcal{U} \text{ ist transitiv} \\
\succ & CD \subset \mathcal{U} \wedge B\,CD \subset B\mathcal{U} = A\mathcal{U} &
\end{array}
$$

Damit gilt $\bigwedge\limits_{B,C,D \in A\mathcal{U}} B\,CD \subset A\mathcal{U}$

Da $\mathcal{U}$ reflexiv ist,gilt aužerdem $A \in A\mathcal{U}$. Damit gilt $\mathcal{U} \neq \emptyset$.

Damit ist $A\mathcal{U}$ nach 3.1* ein Unterraum von $(\mathcal{P}, \|)$.

Ferner gilt nach 3.2* $A\mathcal{U} = A\,(A\mathcal{U})^2$.

Damit gilt nach der Kürzungsregel 1.9$_-$ I:

$$\mathcal{U} = (A\mathcal{U})^2$$

Damit ist $\mathcal{Q} := A\mathcal{U}$ ein Unterraum des affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$,für den $\mathcal{U} = \mathcal{Q}^2$ gilt.

Damit gilt $\ddot{\mathcal{R}} = \{\mathcal{Q}^2 \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mid \mathcal{Q} < (\mathcal{P}, \|)\}$.

□

Satz 3.3** *Die Menge $\ddot{\mathcal{R}}$ der abgeschlossenen Žquivalenzrelationen auf einem graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ lažt sich auf folgende Weise zu einer Verbandsalgebra erweitern:*

3.3.1 $(\ddot{\mathcal{R}}, \circ)$ *ist eine Unterhalbgruppe der in 1.10 behandelten kommutativen Halbgruppe* $(\dot{\mathcal{R}}, \circ)$.

3.3.2 $\ddot{\mathcal{R}}$ *ist durchschnittstreu.*

3.3.3 $(\ddot{\mathcal{R}}, \circ, \cap)$ *ist eine Verbandsalgebra.*

Beweis zu **3.3.1**: Es muž lediglich die Abgeschlossenheit von $\ddot{\mathcal{R}} \subset \dot{\mathcal{R}}$ gegen das Relationenprodukt $\circ$ gezeigt werden.

Es seien Relationen $a, b \in \ddot{\mathcal{R}}$ beliebig vorgegeben. Dann gilt jedenfalls $a \circ b \in \dot{\mathcal{R}}$,da $(\dot{\mathcal{R}}, \circ)$ nach 1.10 eine Halbgruppe ist.

Um nachzuweisen,daž $a \circ b \in \ddot{\mathcal{R}}$ gilt, muž damit nur noch gezeigt werden,daž $a \circ b$ eine Žquivalenzrelation ist.

Zur Reflexivität:Ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ sei beliebig vorgegeben.

Dann gilt $A\,a\,A \wedge A\,b\,A$, da a und b reflexiv sind.

Damit gilt auch $A\,a \circ b\,A$.

Damit ist die Relation $a \circ b$ reflexiv.

Die Kommutativität von $a \circ b$ gilt wegen $a, b \in \dot{\mathcal{R}}$ bereits nach 1.10.

Zur Transitivität: Es gilt

$$\begin{aligned} a \circ b &= (a \circ a) \circ (b \circ b) && \text{da } a \text{ und } b \text{ transitiv sind} \\ &= (a \circ b) \circ (a \circ b) && \text{da } \circ \text{ kommutativ und assoziativ ist} \end{aligned}$$

Damit ist die Relation $a \circ b$ auch transitiv.

Damit ist $a \circ b$ eine Žquivalenzrelation.

Damit gilt $\bigwedge_{a,b \in \ddot{\mathcal{R}}} a \circ b \in \ddot{\mathcal{R}}$.

$\ddot{\mathcal{R}}$ ist also gegen $\circ$ abgeschlossen.

□

Beweis zu **3.3.2**: Es sei eine Menge $\mathcal{R}' \subset \ddot{\mathcal{R}}$ von abgeschlossenen Žquivalenzrelationen auf $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ beliebig vorgegeben. Es muž gezeigt werden,daž gilt:

$$\bigcap \mathcal{R}' \in \ddot{\mathcal{R}}$$

Als Schnittmenge von Žquivalenzrelationen ist $\bigcap \mathcal{R}'$ ebenfalls eine Žquivalenzrelation.

Es seien ferner Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.Dann gilt:

$$\begin{aligned} A \bigcap \mathcal{R}'\, B &\succ \bigwedge_{a \in \mathcal{R}'} A\,a\,B \\ &\succ \bigwedge_{a \in \mathcal{R}'} AB \subset a && \text{da } a \text{ abgeschlossen ist} \\ &\succ AB \subset \bigcap \mathcal{R}' \end{aligned}$$

Damit ist die Žquivalenzrelation $\bigcap \mathcal{R}'$ bezüglich des graphischen Relativs $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ abgeschlossen.

Damit gilt $\bigcap \mathcal{R}' \in \ddot{\mathcal{R}}$.

$\ddot{\mathcal{R}}$ ist also durchschnittstreu.

□

Beweis zu **3.3.3**:

Zu II.12₋ III: Es sei eine Relation $a \in \ddot{\mathcal{R}}$ beliebig vorgegeben.

Dann gilt $a \circ a \subset a$,da a transitiv ist.

Andererseits muž a reflexiv sein.

Damit gilt $O \subset a \succ a = O \circ a \subset a \circ a$.

Damit gilt $a = a \circ a.a = a \cap a$ gilt in jedem Fall.

Zu II.12₋ IV:$\circ$ ist nach 3.3.1 kommutaiv. $\cap$ ist kommutativ.

Zu II.12₋ V:$\circ$ ist nach 3.3.1 assoziativ. $\cap$ ist assoziativ.

Zu II.12₋ VI:Es seien Relationen $a, b \in \ddot{\mathcal{R}}$ beliebig gegeben.

Dann gilt jedenfalls $a \cap (a \circ b) \subset a$.

Ažerdem gilt $a = a \circ O \subset a \circ (a \cap b)$,da a und b reflexiv sind.

Es seien nun Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.

Dann gilt:

$$\begin{array}{lcll} A\,a\,B & \succ & A\,a\,B \wedge B\,b\,B & b \text{ ist reflexiv} \\ & \succ & A\,a\,B \wedge A\,a \circ b\,B & \\ & \succ & A\ (a \cap (a \circ b))\ B & \end{array}$$

Ažerdem gilt:

$$\begin{array}{lcll} A\,a \circ (a \cap b)\,B & \succ & \bigvee\limits_{C \in \mathcal{P}} A\,a\,C \wedge C\,a\,B \wedge C\,b\,B & \\ & \succ & A\,a\,B & a \text{ ist transitiv} \end{array}$$

Damit gilt $a \subset a \cap (a \circ b)$ und $a \circ (a \cap b) \subset a$.

Damit gilt: $\bigwedge\limits_{a,b \in \ddot{\mathcal{R}}} a = a \cap (a \circ b) \wedge a = a \circ (a \cap b)$

Damit ist II.12₋ VI nachgewiesen.

Damit ist $(\ddot{\mathcal{R}}, \circ, \cap)$ eine Verbandsalgebra.

□

Zu der Verbandsalgebra der abgeschlossenen Žquivalenzrelationen $(\ddot{\mathcal{R}}, \circ, \cap)$ auf einem graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ kann auf dem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|) = (\mathcal{P}, \mathcal{R})\gamma$ aus allen Unterräumen auf $(\mathcal{P}, \|)$,die einen festen Punkt $A \in \mathcal{P}$ enthalten, eine isomorphe Verbandsalgebra gebildet werden.

Dazu wird zunächst wird die folgende Definition getroffen:

Def. 3.4 *Ist* $(\mathcal{P}, \|)$ *ein affiner Graph,so bezeichne*

$$\mathcal{M} := \{\mathcal{Q} \subset \mathcal{P} \mid \mathcal{Q} < (\mathcal{P}, \|)\}$$

die Menge aller Unterräume auf $(\mathcal{P}, \|)$.
Es sei nun ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ *beliebig,aber fest vorgegeben.Dann bezeichne*

$$\mathcal{M}_A := \{\mathcal{Q} \subset \mathcal{P} \mid A \in \mathcal{Q} < (\mathcal{P}, \|)\}$$

die Menge aller Unterräume auf $(\mathcal{P}, \|)$*,die* A *enthalten.*

Lemma 3.4* *Ist* $(\mathcal{P}, \|)$ *ein affiner Graph und ist ein Punkt* $A \in \mathcal{P}$ *auf* $(\mathcal{P}, \|)$ *beliebig vorgegeben, so ist* $\mathcal{M}_A$ *ein durchschnittstreues System von Unterräumen auf* $(\mathcal{P}, \|)$.

Beweis zu **3.4*** : Es sei eine Teilmenge ${\mathcal{M}_A}' \subset \mathcal{M}_A$ beliebig vorgegeben. Dann gilt für alle Punkte $B \neq C, D, E \in \mathcal{P}$:

$$\begin{array}{lll} & B, C, D \in \bigcap {\mathcal{M}_A}' \wedge (B, C) \parallel (D, E) & \\ \succ & \bigwedge\limits_{\mathcal{Q} \in {\mathcal{M}_A}'} B, C, D \in \mathcal{Q} \wedge (B, C) \parallel (D, E) & \\ \succ & \bigwedge\limits_{\mathcal{Q} \in {\mathcal{M}_A}'} E \in \mathcal{Q} & \mathcal{Q} \text{ ist ein Unterraum} \\ \succ & E \in \bigcap {\mathcal{M}_A}' & \end{array}$$

Damit ist $\bigcap {\mathcal{M}_A}'$ ein Unterraum des affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$.
Außerdem gilt: $\bigwedge\limits_{\mathcal{Q} \in {\mathcal{M}_A}'} A \in \mathcal{Q} \succ A \in \bigcap {\mathcal{M}_A}'$

Damit gilt für beliebige Teilmengen ${\mathcal{M}_A}' \subset \mathcal{M}_A$: $\bigcap {\mathcal{M}_A}' \in \mathcal{M}_A$.

$\mathcal{M}_A$ ist also durchschnittstreu.

□

Da der Schnitt beliebiger Unterräume aus $\mathcal{M}_A$ selbst wieder ein Unterraum ist,kann nun die folgende Definition getroffen werden:

Def. 3.4** *Eine zweistellige Operation* $\vee$ *auf* $\mathcal{M}_A$ *kann folgendermaßen definiert werden:*

$$\vee := \begin{cases} \mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A \\ \mathcal{Q}_1 \quad \mathcal{Q}_2 \quad \mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2 := \bigcap\limits_{\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{Q} \in \mathcal{M}_A} \mathcal{Q} \end{cases}$$

Satz 3.5 *Ist* $(\mathcal{P}, \|)$ *ein affiner Graph und ist* $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \|)\alpha$ *das zu ihm gehörige graphische Relativ,so gilt für jeden Punkte* $A \in \mathcal{P}$:

$$(\mathcal{M}_A, \vee, \cap) \simeq (\ddot{\mathcal{R}}, \circ, \cap)$$

$(\mathcal{M}_A, \vee, \cap)$ *ist also ebenfalls eine Verbandsalgebra.*

Beweis zu **3.5**: Es sei ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ auf einem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$ beliebig vorgegeben. Betrachte die Abbildung

$$\varphi := \begin{cases} \mathcal{M}_A & \rightarrow \quad \ddot{\mathcal{R}} \\ \mathcal{Q} & \qquad \mathcal{Q}^2 \end{cases}$$

Nach 3.3* ist φ wohldefiniert und surjektiv. Weiterhin gilt für beliebige Unterräume $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \in \mathcal{M}_A$:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{Q}_1 \neq \mathcal{Q}_2 & \succ \quad A\,\mathcal{Q}_1^2 \neq A\,\mathcal{Q}_2^2 & \text{nach 3.2*} \\ & \succ \quad \mathcal{Q}_1^2 \neq \mathcal{Q}_2^2 & \text{nach 1.9\_ I} \end{array}$$

Damit ist φ auch injektiv.Damit ist φ eine Bijektion von $\mathcal{M}_A$ auf $\ddot{\mathcal{R}}$.

Aužerdem gilt für beliebige Unterräume $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \in \mathcal{M}_A$ und für alle Punkte $B \in \mathcal{P}$:

$$\begin{array}{lll} B \in A\,\mathcal{Q}_1\varphi \circ \mathcal{Q}_2\varphi & \succ \quad A\,\mathcal{Q}_1^2 \circ \mathcal{Q}_2^2\,B & \\ & \succ \quad \bigvee\limits_{C \in \mathcal{P}} C \in A\,\mathcal{Q}_1^2 \wedge B \in C\,\mathcal{Q}_2^2 & \\ & \succ \quad \bigvee\limits_{C \in \mathcal{P}} C \in \mathcal{Q}_1 \wedge B \in C\,\mathcal{Q}_2^2 & \\ & \succ \quad \bigvee\limits_{C \in \mathcal{P}} C \in \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \wedge B \in C\,(\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2)^2 & \\ & \succ \quad \bigvee\limits_{C \in \mathcal{P}} C \in \mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2 \wedge B \in C\,(\mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2)^2 & \\ & \succ \quad B \in \mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2 & \text{nach 3.2*} \\ & \succ \quad B \in A\,(\mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2)^2 & \text{nach 3.2*} \\ & \succ \quad B \in A\,(\mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2)\varphi & \end{array}$$

Damit gilt: $A\,\mathcal{Q}_1\varphi \circ \mathcal{Q}_2\varphi \subset A(\mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2)\varphi$

Damit gilt nach 1.9_ I: $\mathcal{Q}_1\varphi \circ \mathcal{Q}_2\varphi \subset (\mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2)\varphi$.

Umgekehrt gilt: $\mathcal{Q}_1 = A\,\mathcal{Q}_1^2 = A\,\mathcal{Q}_1^2 \circ O \subset A\,\mathcal{Q}_1^2 \circ \mathcal{Q}_2^2$, da $\mathcal{Q}_2^2$ reflexiv ist.

Entsprechend gilt auch $\mathcal{Q}_2 \subset A\,\mathcal{Q}_1^2 \circ \mathcal{Q}_2^2$.

Damit gilt: $\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \subset A\,\mathcal{Q}_1^2 \circ \mathcal{Q}_2^2$.

$\mathcal{Q}_1^2 \circ \mathcal{Q}_2^2$ ist als Relationenprodukt abgeschlossener Žquivalenzrelationen selbst eine abgeschlossene Žquivalenzrelation.

Damit ist $A\,\mathcal{Q}_1^2 \circ \mathcal{Q}_2^2$ ein Unterraum des affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$.

Da aužerdem $A \in A\,O \subset A\,\mathcal{Q}_1^2 \circ \mathcal{Q}_2^2$ gilt,gilt damit

$$\mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2 = \bigcap_{\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{Q} \in \mathcal{M}_A} \mathcal{Q} \subset A\,\mathcal{Q}_1^2 \circ \mathcal{Q}_2^2$$

da $A\,\mathcal{Q}_1^2 \circ \mathcal{Q}_2^2$ an der Schnittbildung von $\mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2$ teilnimmt.

Damit gilt nach 3.2* $A\,(\mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2)^2 \subset A\,\mathcal{Q}_1^2 \circ \mathcal{Q}_2^2$.

Damit gilt nach der Kürzungsregel 1.9_ I $(\mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2)\varphi \subset \mathcal{Q}_1\varphi \circ \mathcal{Q}_2\varphi$.

Damit gilt $\mathcal{Q}_1\varphi \circ \mathcal{Q}_2\varphi = (\mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2)\varphi$.

Aužerdem gilt:

$$
\begin{aligned}
& A\,(\mathcal{Q}_1\varphi \cap \mathcal{Q}_2\varphi) \\
= \quad & A\,\mathcal{Q}_1\varphi \cap A\,\mathcal{Q}_2\varphi = A\,\mathcal{Q}_1^2 \cap A\,\mathcal{Q}_2^2 \\
= \quad & \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 = A\,(\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2)^2 \qquad \text{Es gilt } A \in \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 < (\mathcal{P}, \|) \\
= \quad & A\,(\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2)\varphi
\end{aligned}
$$

Damit gilt nach der Kürzungsregel 1.9_ I: $\mathcal{Q}_1\varphi \cap \mathcal{Q}_2\varphi = (\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2)\varphi$.

Damit ist φ ein Isomorphismus der Verbandsalgebra $(\ddot{\mathcal{R}}, \circ, \cap)$ auf $(\mathcal{M}_A, \vee, \cap)$.

Damit ist $(\mathcal{M}_A, \vee, \cap)$ ebenfalls eine Verbandsalgebra.

□

Durch den Satz 3.5 ist aužerdem folgendes sichergestellt:

Bem. 3.5* *Es gilt für beliebige Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ auf einem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$:*

$$(\mathcal{M}_A, \vee, \cap) \simeq (\mathcal{M}_B, \vee, \cap)$$

Die Verbandsalgebren verschiedener Klassen $\mathcal{M}_A, \mathcal{M}_B$ von Unterräumen auf einem affinen Graphen $(\mathcal{P}, \|)$ sind also gleich.

Dieses Ergebnis ist erwähnenswert,da—im Gegensatz zu den Verhältnissen bei affinen Geometrien—zwei aus derselben abgeschlossenen Žquivalenzrelation $\mathcal{U} \subset \ddot{\mathcal{R}}$ gebildete Unterräume $A\mathcal{U}$ und $B\mathcal{U}$ mit unterschiedlichen Punkten $A, B \in \mathcal{P}$ nicht isomorph sein müssen.(Gegenbeispiele sind unter anderem affine Graphen mit Geraden verschiedener Punktzahl.Betrachte etwa den 2-Geraden-Graphen mit sieben Punkten auf S.88.)

3_ II Multigruppen und Multigruppenrelationen

Im folgenden soll der Begriff der Multigruppe zur Beschreibung graphischer Relative zur Verfügung gestellt werden. Nach Comer [3] ist eine Multigruppe folgendermažen definiert:

Def. 3.6 $(\mathcal{P}, \cdot, ^{-1}, O)$ *heiže eine* Multigruppe,*wenn gegeben sind:*

I. *eine Menge $\mathcal{P} = \{a, b, \ldots\}$ mit $O \in \mathcal{P}$*

II. *eine Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ a & & a^{-1} \end{array}$$

III. *eine Verknüpfung*

$$\cdot := \begin{cases} \mathcal{P} & \times & \mathcal{P} & \to & \mathrm{Pot}\mathcal{P}\backslash\{\emptyset\} \\ a & & b & & ab \end{cases}$$

und wenn gilt:

IV. $\bigwedge_{a\in\mathcal{P}} aO = \{a\}$

V. $\bigwedge_{a,b,c\in\mathcal{P}} (ab)c = a(bc)$

VI. $\bigwedge_{a,b,c\in\mathcal{P}} c \in ab \Longrightarrow b \in a^{-1}c$

VII. $\bigwedge_{a,b,c\in\mathcal{P}} c \in ab \Longrightarrow a \in cb^{-1}$

Dabei wird die Verknüpfung "$\cdot$" in folgender Weise auf Pot$\mathcal{P}$ erweitert interpretiert:

$$\cdot := \begin{cases} \mathrm{Pot}\mathcal{P} & \times & \mathrm{Pot}\mathcal{P} & \to & \mathrm{Pot}\mathcal{P} \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} & & \mathcal{A}\mathcal{B} := \bigcup_{a\in\mathcal{A},b\in\mathcal{B}} ab \\ \end{cases}$$

Ferner werden für alle Elemente $a \in \mathcal{P}$ und für alle Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ $a\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}a$ folgendermažen definiert:

$$a\mathcal{A} := \{a\}\mathcal{A} \quad \mathcal{A}a := \mathcal{A}\{a\}$$

Die Definition 3.6 kann im Fall ${}^{-1} = \iota$ folgendermažen vereinfacht werden:

Def. 3.7 $(\mathcal{P}, \cdot, O)$ *heiže eine* symmetrische Multigruppe,*wenn gegeben sind:*

I. *eine Menge* $\mathcal{P} = \{a, b, \ldots\}$ *mit* $O \in \mathcal{P}$

II. *eine Verknüpfung*

$$\cdot := \begin{cases} \mathcal{P} & \times & \mathcal{P} & \to & \mathrm{Pot}\mathcal{P}\backslash\{\emptyset\} \\ a & & b & & ab \end{cases}$$

und wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

III. $\bigwedge_{a\in\mathcal{P}} aO = \{a\}$

IV. $\bigwedge_{a,b,c\in\mathcal{P}} (ab)c = a(bc)$

V. $\bigwedge_{a,b,c\in\mathcal{P}} c \in ab \Longrightarrow b \in ac$

VI. $\bigwedge_{a,b,c\in\mathcal{P}} c \in ab \Longrightarrow a \in cb$

Bem. 3.7* *Damit gilt für symmetrische Multigruppen außerdem*

$$\bigwedge_{a,b\in\mathcal{P}} ab = ba$$

Beweis zu **3.7*** : Es seien Elemente $a, b \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben. Dann gilt für alle Elemente $c \in \mathcal{P}$:

$$\begin{array}{llll} c \in ab & \succ & a \in cb & \text{nach } 3.7\_\ \text{VI} \\ & \succ & b \in ca & \text{nach } 3.7\_\ \text{V} \\ & \succ & c \in ba & \text{nach } 3.7\_\ \text{VI} \end{array}$$

Damit gilt $ab = ba$.

□

Analog zu Comer [3],bei dem die color schemes Multigruppen stiften, und zur Vorlesung zur geometrischen Relationenalgebra [2], wo die affinen Relative symmetrische Multigruppen stiften,die zusätzlich

$$\bigwedge_{a\in\mathcal{P}} aa \subset \{O, a\}$$

erfüllen,k"nnen auch die graphischen Relative symmetrische Multigruppen stiften.

Satz 3.8 *Jedes graphische Relativ* $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ *definiert gemäž* $(\mathcal{R}, \cdot, O)$ *mit*

$$\cdot := \left\{ \begin{array}{ccccc} \mathcal{R} & \times & \mathcal{R} & \rightarrow & \mathrm{Pot}\mathcal{R}\backslash\{\emptyset\} \\ a & & b & & ab := \{c \in \mathcal{R} \mid c \subset a \circ b\} \end{array} \right.$$

eine symmetrische Multigruppe.Dabei bezeichne O *die Gleichheitsrelation.*

Beweis zu **3.8**: Es seien Relationen $a, b \in \mathcal{R}$ beliebig gegeben.Es k"nnen Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ gewählt werden mit $AB = a$.Wegen der Linkstotalität aller Relationen kann außerdem ein Punkt $C \in \mathcal{P}$ gewählt werden mit $BC = b$.Damit gibt es eine Relation $c = AC \in \mathcal{R}$ mit

$$c = AC \subset AB \circ BC = a \circ b$$

Damit gilt $c \in ab$.

Damit gilt für alle Relationen $a, b \in \mathcal{R}$ $ab \neq \emptyset$.

Um zu beweisen,daž $(\mathcal{R}, \cdot, O)$ eine symmetrische Multigruppe ist, müssen damit nur noch die Bedingungen 3.7_ III–3.7_ VI nachgewiesen werden.

3.7_ III gilt,da für alle Relationen $a \in \mathcal{R}$ $a \circ O = a$ gilt.

3.7_ IV gilt,da das Relationenprodukt assoziativ ist.

zu 3.7_ V und 3.7_ VI: Für beliebige Relationen $a, b, c \in \mathcal{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
c \in ab \quad & \rtimes \quad c \subset a \circ b \\
& \rtimes \quad \bigvee_{A,B,C\in\mathcal{P}} c = AC, a = AB, b = BC \qquad \text{nach 1.4} \\
& \rtimes \quad \bigvee_{A,B,C\in\mathcal{P}} b = BC \subset BA \circ AC = a \circ c \\
& \qquad \wedge a = AB \subset AC \circ CB = c \circ b \\
& \rtimes \quad b \in ac \wedge a \in cb
\end{aligned}
$$

□

Der Zusammenhang zwischen einem graphischen Relativ und der zu ihm geh"rigen Multigruppe ist nicht eindeutig. Nicht isomorphe graphische Relative k"nnen dieselbe Multigruppe besitzen.

Als Beispiel für solche zueinander nicht isomorphen Relative, die isomorphe symmetrische Multigruppen erzeugen, kann die im folgenden definierte Klasse der *Geradeneinteilungen* auf einer Grundmenge $\mathcal{P}$ betrachtet werden.

Def. 3.9 *Es sei eine Klasseneinteilung K auf einer Grundmenge $\mathcal{P}$ gegeben,für die $|K| \geq 2$ gelte. Dann heiže $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ mit*

$$\mathcal{R} = \{O, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$$

$$\bigwedge_{A\neq B\in\mathcal{P}} A\,\mathcal{R}_1\,B :\Longleftrightarrow \langle A\rangle_K = \langle B\rangle_K$$

$$\bigwedge_{A\neq B\in\mathcal{P}} A\,\mathcal{R}_2\,B :\Longleftrightarrow \langle A\rangle_K \neq \langle B\rangle_K$$

eine Geradeneinteilung auf $\mathcal{P}$,*falls $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ ein graphisches Relativ ist.*

Satz 3.9* *K sei eine Klasseneinteilung auf einer Grundmenge $\mathcal{P}$ und es gelte $|K| \geq 2$. Dann ist das nach 3.9 gebildete $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ genau dann eine Geradeneinteilung auf $\mathcal{P}$,wenn gilt:*

$$\bigwedge_{A\in\mathcal{P}} |\langle A\rangle_K| = 2 \vee \bigwedge_{A\in\mathcal{P}} |\langle A\rangle_K| > 2$$

Es k"nnen dabei vier verschiedene Klassen von Geradeneinteilungen gebildet werden,die jeweils unterschiedliche Multigruppen besitzen.

$\bigwedge_{A\in\mathcal{P}} |\langle A\rangle_K| = 2$, $|K| = 2$:

	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$
$\mathcal{R}_1$	O	$\mathcal{R}_2$
$\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_2$	$O, \mathcal{R}_1$

$\bigwedge_{A\in\mathcal{P}} |\langle A\rangle_K| = 2$, $|K| > 2$:

	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$
$\mathcal{R}_1$	O	$\mathcal{R}_2$
$\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_2$	$O, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$

$\bigwedge_{A\in\mathcal{P}} |\langle A\rangle_K| > 2$, $|K| = 2$:

	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$
$\mathcal{R}_1$	$O, \mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$
$\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_2$	$O, \mathcal{R}_1$

$\bigwedge_{A\in\mathcal{P}} |\langle A\rangle_K| > 2$, $|K| > 2$:

	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$
$\mathcal{R}_1$	$O, \mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$
$\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_2$	$O, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$

Beweis zu **3.9*** : Es sei K eine Klasseneinteilung auf einer Grundmenge $\mathcal{P}$. $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ sei nach 3.9 definiert.

Würde dann für ein $A \in \mathcal{P}$ $|\langle A \rangle_K| = 1$ und damit $\langle A \rangle_K = \{A\}$ gelten, so müžte für alle $B \in \mathcal{P}$ mit $B \neq A$ gelten:

$$B \notin \langle A \rangle_K \succ (A, B) \notin \mathcal{R}_1$$

Damit wäre $\mathcal{R}_1$ nicht linkstotal.

$(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ kann in diesem Fall kein graphisches Relativ sein.

Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ ein graphisches Relativ,so muž also jedenfalls gelten:

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{P}} |\langle A \rangle_K| \geq 2$$

Gilt das,so sieht man leicht,daž $\mathcal{R}_1 \neq \emptyset$ und wegen $|K| > 1$ auch $\mathcal{R}_2 \neq \emptyset$ gilt.

Aužerdem sind die Relationen $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ symmetrisch und $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ erfüllt zumindest 1.2_{-} III.

Es seien nun Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ gegeben mit $|\langle A \rangle_K| = 2$ und $|\langle B \rangle_K| > 2$.

Dann gibt es einen Punkt $C \in \mathcal{P}$ mit $\langle A \rangle_K = \{A, C\}$.

Aužerdem gibt es Punkte $D, E \in \langle B \rangle_K$ so,daž B, D und E paarweise verschieden sind.

Es gilt also $\mathcal{R}_1 = BD = BE = DE$.

Würde 1.2_{-} IV gelten,so müžte damit $\mathcal{R}_1 = DE \subset DB \circ BE = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_1$ gelten.

Betrachte nun $\langle A \rangle_K = \{A, C\}$. Es gilt $A\, \mathcal{R}_1\, C$.

Damit müžte gelten:

$$\begin{aligned} A\, \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_1\, C \quad & \succ \quad \bigvee_{F \in \mathcal{P}} A\, \mathcal{R}_1\, F \wedge F\, \mathcal{R}_1\, C \\ & \succ \quad \bigvee_{F \in \mathcal{P}} F \in \langle A \rangle_K \wedge F \neq A, F \neq C \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

$(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ kann damit nur dann ein graphisches Relativ sein, wenn gilt:

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{P}} |\langle A \rangle_K| = 2 \vee \bigwedge_{A \in \mathcal{P}} |\langle A \rangle_K| > 2$$

Um zu zeigen,daž $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ in diesen Fällen tatsächlich ein graphisches Relativ ist,muž nur noch 1.2_{-} IV nachgewiesen werden.

Es seien Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.

Es muž nachgewiesen werden,daž $AB \subset AC \circ CB$ gilt.

Diese Gleichung ist trivial,falls $A = C$ oder $C = B$ gilt.

Es gelte $A = B \neq C$.

Gilt dann $C \in \langle A\rangle_K$,so mu˘z nachgewiesen werden,da˘z $O \subset \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_1$ gilt.

Gilt $C \notin \langle A\rangle_K$,so mu˘z nachgewiesen werden,da˘z $O \subset \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_2$ gilt.

Beide Fälle gelten,da man leicht sieht,da˘z $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ linkstotal und symmetrisch sind.

Sind die Punkte A, B und C paarweise verschieden,so müssen die folgenden fünf m"glichen Fälle untersucht werden:

I. $\langle A\rangle_K = \langle B\rangle_K = \langle C\rangle_K$

II. $\langle A\rangle_K = \langle B\rangle_K \neq \langle C\rangle_K$

III. $\langle A\rangle_K \neq \langle B\rangle_K = \langle C\rangle_K$

IV. $\langle B\rangle_K \neq \langle A\rangle_K = \langle C\rangle_K$

V. $\langle A\rangle_K$,$\langle B\rangle_K$ und $\langle C\rangle_K$ sind paarweise verschieden.

Zu Fall 3.9_ I:

In diesem Fall gilt $|\langle A\rangle_K| \geq 3$. Damit mu˘z in diesem Fall $\bigwedge_{D\in\mathcal{P}} |\langle D\rangle_K| > 2$ gelten.

Es mu˘z gezeigt werden,da˘z $\mathcal{R}_1 = AB \subset AC \circ CB = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_1$ gilt.

Es gilt für alle Punkte $D, E \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} D\,\mathcal{R}_1\,E &\succ E \in \langle D\rangle_K \\ &\succ \bigvee_{F\in\mathcal{P}} E \neq F \neq D \wedge E, F \in \langle D\rangle_K \quad \text{wegen } |\langle D\rangle_K| \geq 3 \\ &\succ \bigvee_{F\in\mathcal{P}} D\,\mathcal{R}_1\,F \wedge F\,\mathcal{R}_1\,E \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_1$.

Zu Fall 3.9_ II:

Es mu˘z gezeigt werden,da˘z $\mathcal{R}_1 = AB \subset AC \circ CB = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_2$ gilt.

Es gilt für alle Punkte $D, E \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} D\,\mathcal{R}_1\,E &\succ E \in \langle D\rangle_K \\ &\succ \bigvee_{F\in\mathcal{P}} F \notin \langle D\rangle_K, E \in \langle D\rangle_K \quad \text{da } |K| \geq 2 \text{ gilt} \\ &\succ D\,\mathcal{R}_2\,F \wedge F\,\mathcal{R}_2\,E \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_2$.

Zu Fall 3.9_ III:

Es mu˘z gezeigt werden,da˘z $\mathcal{R}_2 = AB \subset AC \circ CB = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ gilt.

Es gilt für alle Punkte $D, E \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} D\,\mathcal{R}_2\,E &\succ \langle D\rangle_K \neq \langle E\rangle_K \\ &\succ \bigvee_{F\in\mathcal{P}} F \neq E \wedge F \in \langle E\rangle_K \neq \langle D\rangle_K \quad \text{da } |\langle E\rangle_K| \geq 2 \text{ gilt} \\ &\succ D\,\mathcal{R}_2\,F \wedge F\,\mathcal{R}_1\,E \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.

Zu Fall 3.9_ IV:

Es muž gezeigt werden,daž $\mathcal{R}_2 = AB \subset AC \circ CB = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ gilt.

Der Beweis ist analog zum Fall 3.9_ III.

Zu Fall 3.9_ V:

In diesem Fall muž $|K| > 2$ gelten.

Es muž gezeigt werden,daž $\mathcal{R}_2 = AB \subset AC \circ CB = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_2$ gilt.

Es gilt für alle Punkte $D, E \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} D\,\mathcal{R}_2\,E &\succ \langle D\rangle_K \neq \langle E\rangle_K \\ &\succ \bigvee_{F\in\mathcal{P}} \langle F\rangle_K \neq \langle D\rangle_K \neq \langle E\rangle_K \neq \langle F\rangle_K \quad \text{da } |K| > 2 \text{ gelten muž} \\ &\succ \bigvee_{F\in\mathcal{P}} D\,\mathcal{R}_2\,F \wedge F\,\mathcal{R}_2\,E \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_2$.

Die vier verschiedenen Multigruppen ergeben sich aus der Untersuchung der Fälle 3.9_ I–3.9_ V.

□

Zur leichteren Untersuchung der Zusammenhänge zwischen einem graphischen Relativ und seiner Multigruppe wird im folgenden der Begriff der Multigruppenrelation eingeführt. Es wird gezeigt,daž die Klasse der Multigruppenrelationen und die Klasse der symmetrischen Multigruppen zueinander synonym sind.

Um Multigruppenrelationen definieren zu k"nnen, werden zunächst zwei Hilfsdefinitionen getroffen.

Def. 3.10 *Ein* Verkettungsprodukt $\between$ *zweier mehrstelliger Relationen* $a, b \in$ Pot$\mathcal{P}^n$ *auf einer Grundmenge* $\mathcal{P}$ *kann folgendermažen definiert werden:*

$$a \between b = \{(A_1, \cdots, A_{n+1}) \in \mathcal{P}^{n+1} \mid (A_1, \cdots, A_n) \in a \wedge (A_2, \cdots, A_{n+1}) \in b\}$$

Bem. 3.10* *Das Verkettungprodukt auf zweistelligen Relationen ist das Relationenprodukt.*

Def. 3.11 *Eine n-stellige Relation $r \subset \mathcal{P}^n$ auf einer Grundmenge $\mathcal{P}$ heiže* permutationsunabhängig,*wenn $r = (r)\sigma$ für alle Permutationen $\sigma \in \Sigma_n$ gilt.*

Mit Hilfe der Definitionen 3.10 und 3.11 kann nun der Begriff der Multigruppenrelation definiert werden:

Def. 3.12 *$(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ heiže eine* Multigruppenrelation,*wenn gegeben sind:*

I. *eine Menge $\mathcal{P} = \{a, b, \ldots\}$ mit $O \in \mathcal{P}$.*

II. *eine dreistellige Relation $\bar{r} \subset \mathcal{P}^3$ auf $\mathcal{P}$.*

und wenn gilt:

III. $\bigwedge_{a,b \in \mathcal{P}} \bigvee_{c \in \mathcal{P}} (a, b, c) \in \bar{r}$

IV. $\bigwedge_{a,b \in \mathcal{P}} (O, a, b) \in \bar{r} \Longrightarrow a = b$

V. *$\bar{r}$ und $\bar{r} \between \bar{r}$ sind permutationsunabhängig.*

Satz 3.13 *Die Klasse der symmetrischen Multigruppen und die Klasse der Multigruppenrelationen k"nnen durch folgende Umkehrungen synonym aufeinander bezogen werden:*

3.13.1 *Ist $(\mathcal{P}, \cdot, O)$ eine symmetrische Multigruppe,so wird durch $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ mit*

$$\bar{r} := \{(a, b, c) \in \mathcal{P}^3 \mid c \in ab\}$$

eine Multigruppenrelation definiert.

3.13.2 *Ist $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ eine Multigruppenrelation , so wird durch $(\mathcal{P}, \cdot, O)$ mit*

$$\cdot := \left\{ \begin{array}{ccccc} \mathcal{P} & \times & \mathcal{P} & \to & \mathrm{Pot}\mathcal{P} \backslash \{\emptyset\} \\ a & & b & & ab = \{c \in \mathcal{P} \mid (a, b, c) \in \bar{r}\} \end{array} \right.$$

eine symmetrische Multigruppe definiert.

Beweis zu **3.13.1**: Es müssen die Bedingungen 3.12_ III–3.12_ V nachgewiesen werden.

3.12_ III gilt,da für alle Elemente $a, b \in \mathcal{P}$ $ab \neq \emptyset$ gilt.

Zu 3.12_ IV:Es gilt für alle Elemente $a, b \in \mathcal{P}$:

$$\begin{array}{lll} (O, a, b) \in \bar{r} & \succ \; b \in Oa & \text{nach der Definition von } \bar{r} \\ & \succ \; b \in \{a\} & \text{nach 3.7\_ III} \\ & \succ \; b = a & \end{array}$$

Zu 3.12_ V:$\bar{r}$ ist permutationsunabhängig,da für alle Elemente $a, b, c \in \mathcal{P}$ gilt:

$$
\begin{array}{rcll}
(a, b, c) \in \bar{r} & \succ & c \in ab & \\
& \succ & b \in ac \wedge a \in cb & \text{nach 3.7\_ V und 3.7\_ VI} \\
& \wedge & c \in ba \wedge b \in ca \wedge a \in bc & \text{nach 3.7*} \\
& \succ & (a, b, c), (a, c, b), (c, b, a) & \\
& & (b, a, c), (c, a, b), (b, c, a) \in \bar{r} &
\end{array}
$$

Damit sind alle sechs m"glichen Permutationen des Tripels $(a, b, c) \in \bar{r}$ ebenfalls Elemente von $\bar{r}$.

Es mus̆ noch die Permutationsunabhängigkeit von $\bar{r} \mathbin{\diamond\!\!\!\mid} \bar{r}$ gezeigt werden.

Es seien Elemente $a, b, c, d \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.Dann gilt:

$$
\begin{array}{rcll}
(a, b, c, d) \in \bar{r} \mathbin{\diamond\!\!\!\mid} \bar{r} & \succ & \bigvee\limits_{e \in \mathcal{P}} (a, b, e), (e, c, d) \in \bar{r} & \\
& \succ & \bigvee\limits_{e \in \mathcal{P}} e \in ab \wedge d \in ec & \\
& \succ & d \in (ab)c = a(bc) & \text{nach 3.7\_ IV} \\
& \succ & \bigvee\limits_{f \in \mathcal{P}} d \in af \wedge f \in bc & \\
& \succ & \bigvee\limits_{f \in \mathcal{P}} (a, f, d), (b, c, f) \in \bar{r} & \\
& \succ & \bigvee\limits_{f \in \mathcal{P}} (a, d, f), (f, b, c) \in \bar{r} & \text{Permutationen in } \bar{r} \\
& \succ & (a, d, b, c) \in \bar{r} \mathbin{\diamond\!\!\!\mid} \bar{r} &
\end{array}
$$

Wegen der Permutationsunabhängigkeit von $\bar{r}$ gilt aus̆erdem:

$(a, b, c, d) \in \bar{r} \mathbin{\diamond\!\!\!\mid} \bar{r} \succ (b, a, c, d), (a, b, d, c) \in \bar{r} \mathbin{\diamond\!\!\!\mid} \bar{r}$

Mit diesen drei Vertauschungsregeln lassen sich alle Permutationen des Quadrupels (a, b, c, d) konstruieren.

Damit ist $\bar{r} \mathbin{\diamond\!\!\!\mid} \bar{r}$ permutationsunabhängig.

Damit sind die Bedingungen 3.12_ III–3.12_ V nachgewiesen.

□

Beweis zu **3.13.2**: Es gilt nach 3.12_ III für beliebige Elemente $a, b \in \mathcal{P}$:

$$\bigvee_{c \in \mathcal{P}} (a, b, c) \in \bar{r} \succ \bigvee_{c \in \mathcal{P}} c \in ab \succ ab \neq \emptyset$$

Damit ist "·" wohldefiniert.

Es müssen noch die Bedingungen 3.7_- III–3.7_- VI nachgewiesen werden.
Zu 3.7_- III:Für beliebige Elemente $a, b \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\begin{array}{lll} b \in aO & \succ & (a, O, b) \in \bar{r} \\ & \succ & (O, a, b) \in \bar{r} \quad \text{Permutationsabgeschlossenheit von } \bar{r} \\ & \succ & a = b \qquad\qquad\ \ \text{nach } 3.12_- \text{ IV} \end{array}$$

Damit gilt $aO \subset \{a\}$.Damit gilt wegen $aO \neq \emptyset$ $aO = \{a\}$.
Zu 3.7_- IV: Es gilt für beliebige Elemente $a, b, c \in \mathcal{P}$ und für alle Elemente $d \in \mathcal{P}$:

$$\begin{array}{lll} d \in (ab)c & \succ & \bigvee\limits_{e \in \mathcal{P}} e \in ab \wedge d \in ec \\ & \succ & \bigvee\limits_{e \in \mathcal{P}} (a, b, e), (e, c, d) \in \bar{r} \\ & \succ & (a, b, c, d) \in \bar{r} \mathbin{\Diamond\!\!\!\!\mid\,} \bar{r} \\ & \succ & (b, c, a, d) \in \bar{r} \mathbin{\Diamond\!\!\!\!\mid\,} \bar{r} \\ & \succ & \bigvee\limits_{f \in \mathcal{P}} (b, c, f), (f, a, d) \in \bar{r} \\ & \succ & \bigvee\limits_{f \in \mathcal{P}} (a, f, d), (b, c, f) \in \bar{r} \\ & \succ & \bigvee\limits_{f \in \mathcal{P}} d \in af \wedge f \in bc \\ & \succ & d \in a(bc) \end{array}$$

Damit gilt für alle Elemente $a, b, c \in \mathcal{P}$ $(ab)c = a(bc)$.
Zu 3.7_- V und 3.7_- VI:Für alle Elemente $a, b, c \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\begin{array}{lll} c \in ab & \succ & (a, b, c) \in \bar{r} \\ & \succ & (a, c, b), (c, b, a) \in \bar{r} \quad \text{Permutationsabgeschlossenheit von } \bar{r} \\ & \succ & b \in ac \wedge a \in cb \end{array}$$

□

Beweis zu **3.13**: Ist $(\mathcal{P}, \cdot, O)$ eine symmetrische Multigruppe,$(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ ihre nach 3.13.1 gebildete Multigruppenrelation und $(\mathcal{P}, \cdot', O)$ die dazu nach 3.13.2 definierte symmetrische Multigruppe,so gilt für alle Elemente $a, b \in \mathcal{P}$:

$$a \cdot' b = \{c \in \mathcal{P} \mid (a, b, c) \in \bar{r}\} = \{c \in \mathcal{P} \mid c \in ab\} = ab$$

Damit gilt $(\mathcal{P}, \cdot, O) = (\mathcal{P}, \cdot', O)$.

Ist nun $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ eine Multigruppenrelation,$(\mathcal{P}, \cdot, O)$ die nach 3.13.2 zu ihr geh"rige symmetrische Multigruppe und $(\mathcal{P}, \bar{r}', O)$ die dazu nach 3.13.1 definierte Multigruppenrelation,so gilt für beliebige Elemente $a, b, c \in \mathcal{P}$:

$(a, b, c) \in \bar{r}' \rtimes c \in ab \rtimes (a, b, c) \in \bar{r}$

Damit gilt $(\mathcal{P}, \bar{r}, O) = (\mathcal{P}, \bar{r}', O)$.

Damit kehren die Verfahren 3.13.1 und 3.13.2 einander um.

□

Da die symmetrischen Multigruppen und die Multigruppenrelationen zueinander synonym sind,kann nun auch die zu einem graphischen Relativ geh"rige Multigruppenrelation angegeben werden.

Bem. 3.13* *Jedes graphische Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ definiert eine Multigruppenrelation $(\mathcal{R}, \bar{r}, O)$ gemäž*

$$\bar{r} := \{(a, b, c) \in \mathcal{R}^3 \mid a \subset b \circ c\}$$

Beweis zu **3.13*** : Betrachte die zu einem graphischen Relativ geh"rige symmetrische Multigruppe nach 3.8.Die nach 3.13.1 zu ihr geh"rige Multigruppenrelation $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \{(b, c, a) \in \mathcal{R}^3 \mid a \in bc\} \\ &= \{(b, c, a) \in \mathcal{R}^3 \mid a \subset b \circ c\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathcal{R}^3 \mid a \subset b \circ c\} \quad \bar{r} \text{ ist permutationsunabhängig} \end{aligned}$$

□

3_ III Vereinfachungen auf graphischen Relativen

Außer den Unterräumen kann man auch allgemeinere Strukturen auf einem affinen Graphen betrachten,die selbst wieder affine Graphen sind.Affine Graphen k"nnen unter Umständen durch das Zusammenfassen mehrer “Richtungen” zu einer einzigen zu anderen affinen Graphen vereinfacht werden.

Der Graph auf S.83 kann zum Beispiel auf diese Weise aus der affinen Ebene mit zwei Punkten pro Gerade (siehe S.82) gewonnen werden.

Im folgenden wird anhand der Multigruppenrelation eines graphischen Relatives näher untersucht,unter welchen Bedingungen eine solche Vereinfachung zu einem gegebenen graphischen Relativ erzeugt werden kann.

Da in diesem Kapitel häufiger gleichzeitig verschiedene graphische Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{R}), (\mathcal{P}, \mathcal{R}'), (\mathcal{P}, \mathcal{R}_1) \ldots$ betrachtet werden,bezeichne im folgenden für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ AB die auf $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ eindeutig gegebene Relation mit $A\, AB\, B$,AB' die entsprechende Relation auf $(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$,$AB^1$ die entsprechende Relation auf $(\mathcal{P}, \mathcal{R}_1) \ldots$

Def. 3.14 $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ *und* $(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$ *seien zwei graphische Relative auf der gleichen Grundmenge* $\mathcal{P}$.

Dann heiße $(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$ vereinfacht zu $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$*,wenn* $\mathcal{R}' \subset \dot{\mathcal{R}}$ *gilt.*

$\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}$ *bezeichne die Menge aller zu einem graphischen Relativ* $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ *vereinfachten graphischen Relative.*

Eine Relation $\leq$ *auf* $\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}$ *kann folgendermaßen definiert werden:*

$$\bigwedge_{(\mathcal{P},\mathcal{R}_1),(\mathcal{P},\mathcal{R}_2)\in\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}} (\mathcal{P}, \mathcal{R}_1) \leq (\mathcal{P}, \mathcal{R}_2) :\Longleftrightarrow \mathcal{R}_1 \subset \dot{\mathcal{R}}_2$$

Im Lauf des Kapitels wird bewiesen werden, daß $(\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}, \leq)$ ein vollständiger Verband ist.

Zu jeder Vereinfachung eines graphischen Relatives $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ wird zunächst eine Klasseneinteilung auf der Menge $\mathcal{R}$ der Relationen von $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ definiert:

Bem. 3.14* $(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$ *sei ein zu einem graphischen Relativ* $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ *vereinfachtes graphisches Relativ. Dann kann eine Klasseneinteilung* $K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ *auf der Relationenmenge* $\mathcal{R}$ *folgendermaßen definiert werden:*

$$\bigwedge_{a\in\mathcal{R}} \langle a\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} := \{b \in \mathcal{R} \mid \bigvee_{a'\in\mathcal{R}'} a, b \subset a'\}$$

Beweis zu **3.14*** : Es muß gezeigt werden,daß $K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ eine Klasseneinteilung ist.

Eine Relation $AB \in \mathcal{R}$ $(A, B \in \mathcal{P})$ sei beliebig vorgegeben.

Betrachte die Relation $AB' \in \mathcal{R}' \subset \dot{\mathcal{R}}$ auf dem graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$.

Wegen $A\, AB'\, B$ und $AB' \in \dot{\mathcal{R}}$ gilt $AB \subset AB'$. Damit gilt für alle Relationen $AB \in \mathcal{R}$:

$$AB \in \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$$

Es seien nun Klassen $\langle a\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}, \langle b\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \in K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ $(a, b \in \mathcal{R})$ mit $\langle a\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \cap \langle b\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \neq \emptyset$ beliebig vorgegeben.

Dann gibt es eine Relation $c \in \mathcal{R}$,so daß gilt:

$$\begin{aligned}
c \in \langle a\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \cap \langle b\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} &\succ \bigvee_{a',b'\in\mathcal{R}'} a, c \subset a' \wedge c, b \subset b' \\
&\succ \bigvee_{a',b'\in\mathcal{R}'} a \subset a' \wedge b \subset b' \wedge a' \cap b' \neq \emptyset \\
&\succ \bigvee_{a',b'\in\mathcal{R}'} a \subset a' \wedge b \subset b' \wedge a' = b' \\
&\succ \bigvee_{a'\in\mathcal{R}'} a, b \subset a'
\end{aligned}$$

Damit gilt $\langle a\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = \langle b\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$.

Damit ist $K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ eine Klasseneinteilung auf $\mathcal{R}$.

□

Auf einer so gegebenen Klasseneinteilung $K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ gilt außerdem das folgende Lemma:

Lemma 3.15 *Ist $(\mathcal{P},\mathcal{R})$ ein graphisches Relativ und ist $(\mathcal{P},\mathcal{R}') \in \mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}$ ein zu $(\mathcal{P},\mathcal{R})$ vereinfachtes graphisches Relativ,so gilt für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$:*

$$\langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = \{b \in \mathcal{R} \mid b \subset AB'\}$$

und

$$\bigcup \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = AB' \in \mathcal{R}'$$

Beweis zu **3.15**: Es seien Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.Dann gilt:

$$\langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = \{b \in \mathcal{R} \mid \bigvee_{a' \in \mathcal{R}'} b, AB \subset a'\}$$

Für alle Relationen $a' \in \mathcal{R}' \subset \dot{\mathcal{R}}$ gilt nun aber:

$$AB \subset a' \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail A\,a'\,B \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail a' = AB'$$

Damit gilt: $\langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = \{b \in \mathcal{R} \mid b \subset AB'\}$
Damit gilt für alle Punkte $A_1, B_1 \in \mathcal{P}$:

$$\begin{array}{llll}
A_1\,AB'\,B_1 & \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail & A_1B_1 \subset AB' & AB' \in \dot{\mathcal{R}} \\
 & \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail & A_1B_1 \in \{b \in \mathcal{R} \mid b \subset AB'\} & \\
 & \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail & A_1B_1 \in \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} & \\
 & \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail & A_1B_1 \subset \bigcup \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} & \text{nach 1.9_ II} \\
 & \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail & A_1 \bigcup \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} B_1 & \bigcup \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \in \dot{\mathcal{R}}
\end{array}$$

Damit gilt auch $\bigcup \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = AB'$.
□

Als nächstes werden solche Klasseneinteilungen auf Multigruppenrelationen betrachtet,die selbst wieder Multigruppenrelationen stiften.

Def. 3.16 *Ist $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ eine Multigruppenrelation und ist $K \in \mathcal{P}^\kappa$ eine Klasseneinteilung auf $\mathcal{P}$ mit*

$$\bigwedge_{a \in \langle O\rangle_K} \bigwedge_{b,c \in \mathcal{P}} (a,b,c) \in \bar{r} \succ \langle b\rangle_K = \langle c\rangle_K$$

so heiße $K \in \mathcal{P}^\kappa$ eine Multiklasse auf $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$.
Gilt sogar $\langle O\rangle_K = \{O\}$
so heiße $K \in \mathcal{P}^\kappa$ eine eigentliche Multiklasse auf $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$.
Die Menge der eigentlichen Multiklassen auf einerMultigruppenrelation $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ werde mit $\mathcal{P}^\kappa_e$ bezeichnet.

Satz 3.16* *$(\mathcal{P}_e^\kappa, \leq)$ ist ein Teilverband des vollständigen Verbandes $(\mathcal{P}^\kappa, \leq)$ (siehe II.17).*

$(\mathcal{P}_e^\kappa, \leq)$ ist selbst ein vollständiger Verband.

Beweis zu **3.16*** : $\emptyset \neq \kappa' \subset \mathcal{P}_e^\kappa$ sei eine Menge eigentlicher Multiklassen auf der Multigruppenrelation $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$.

Betrachtet man das Supremum $\sup \kappa'$ von κ' auf $(\mathcal{P}^\kappa, \leq)$,so gilt:

$$\langle O\rangle_{\sup \kappa'} = \bigcap_{K\in\kappa'} \langle O\rangle_K = \bigcap_{K\in\kappa'} \{O\} = \{O\}$$

Damit gilt $\sup \kappa' \in \mathcal{P}_e^\kappa$.

Betrachtet man das Infimum $\inf \kappa'$ von κ' auf $(\mathcal{P}^\kappa, \leq)$, so gilt für jedes Element $a \in \mathcal{P}$:

$$a \in \langle O\rangle_{\inf \kappa'} \succ \bigvee_{a_0 \ldots a_n \in \mathcal{P}} \left(a = a_0 \wedge a_n = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{K_i \in \kappa'} a_{i-1} \in \langle a_i\rangle_{K_i} \right)$$

Damit gilt $a_n = 0$ und es gilt für alle $i = n \ldots 1$:

$$\begin{aligned} a_i = 0 \quad &\succ \quad \langle a_i\rangle_{K_i} = \langle 0\rangle_{K_i} = \{0\} \\ &\succ \quad a_{i-1} \in \langle a_i\rangle_{K_i} = \{0\} \\ &\succ \quad a_{i-1} = 0 \end{aligned}$$

Nach Induktion gilt damit $a = a_0 = O$.

Damit gilt $a \in \langle O\rangle_{\inf \kappa'} \succ a = O$.

Damit gilt $\langle O\rangle_{\inf \kappa'} = \{O\}$.

Es gilt also auch $\inf \kappa' \in \mathcal{P}_e^\kappa$.

Damit ist $(\mathcal{P}_e^\kappa, \leq)$ ein Teilverband von $(\mathcal{P}^\kappa, \leq)$ und $(\mathcal{P}_e^\kappa, \leq)$ ist vollständig.

□

Satz 3.17 *Ist $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ eine Multigruppenrelation und ist $K \in \mathcal{P}^\kappa$ eine Multiklasse auf $\mathcal{P}$, so wird durch $(K, \bar{r}_K, \langle O\rangle_K)$ mit*

$$\bar{r}_K := \{(\langle a\rangle_K, \langle b\rangle_K, \langle c\rangle_K) \in K^3 \mid (a, b, c) \in \bar{r}\}$$

ebenfalls eine Multigruppenrelation definiert.

Beweis zu **3.17**: Es müssen die Bedingungen 3.12_ III–3.12_ V nachgewiesen werden.

Zu 3.12_ III: Es gilt:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{a,b\in\mathcal{P}} \bigvee_{c\in\mathcal{P}} (a, b, c) \in \bar{r} \quad &\succ \quad \bigwedge_{a,b\in\mathcal{P}} \bigvee_{c\in\mathcal{P}} (\langle a\rangle_K, \langle b\rangle_K, \langle c\rangle_K) \in \bar{r}_K \\ &\succ \quad \bigwedge_{\langle a\rangle_K, \langle b\rangle_K \in K} \bigvee_{\langle c\rangle_K \in K} (\langle a\rangle_K, \langle b\rangle_K, \langle c\rangle_K) \in \bar{r}_K \end{aligned}$$

Zu 3.12_{-} IV:Für alle Klassen $\langle a\rangle_K, \langle b\rangle_K \in K$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\langle O\rangle_K, \langle a\rangle_K, \langle b\rangle_K) \in \bar{r}_K \quad &\succ \bigvee_{c' \in \langle O\rangle_K} \bigvee_{a' \in \langle a\rangle_K} \bigvee_{b' \in \langle b\rangle_K} (c', a', b') \in \bar{r} \\
&\succ \bigvee_{a' \in \langle a\rangle_K} \bigvee_{b' \in \langle b\rangle_K} \langle a'\rangle_K = \langle b'\rangle_K \qquad \text{siehe } 3.16 \\
&\succ \langle a\rangle_K = \langle b\rangle_K
\end{aligned}$$

Zu 3.12_{-} V Die Permutationsunabhängigkeit von $\bar{r}_K$ und $\bar{r}_K \phi \bar{r}_K$ folgt direkt aus der Permutationsunabhängigkeit von $\bar{r}$ und $\bar{r} \phi \bar{r}$.

□

Jetzt k"nnen eigentliche Vereinfachungen auf einer Multigruppenrelation $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ definiert werden.

Def. 3.17* *Ist $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ eine Multigruppenrelation und ist $K \in \mathcal{P}^\kappa$ eine Multiklasse auf $\mathcal{P}$, so heiße die Multigruppenrelation $(K, \bar{r}_K, \langle O\rangle_K)$ eine* Vereinfachung von $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$.

Ist K eine eigentliche Multiklasse,so werde $(K, \bar{r}_K, \langle O\rangle_K)$ als eigentliche *Vereinfachung von $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ bezeichnet.*

Die Menge aller eigentlichen Vereinfachungen von $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ werde mit $\mathcal{V}_{(\mathcal{P}, \bar{r}, O)}$ bezeichnet.

Bem. 3.17** $(\mathcal{V}_{(\mathcal{P}, \bar{r}, O)}, \leq)$ *mit*

$$\bigwedge_{K_1, K_2 \in \mathcal{P}_e^\kappa} (K_1, \bar{r}_{K_1}, \langle O\rangle_{K_1}) \leq (K_2, \bar{r}_{K_2}, \langle O\rangle_{K_2}) :\Longleftrightarrow K_1 \leq K_2$$

ist ein vollständiger Verband.

Beweis zu **3.17**** : Es ist $(\mathcal{P}_e^\kappa, \leq)$ nach 3.16* ein vollständiger Verband und es gilt $(\mathcal{P}_e^\kappa, \leq) \simeq (\mathcal{V}_{(\mathcal{P}, \bar{r}, O)}, \leq)$ nach der Definition von $\mathcal{V}_{(\mathcal{P}, \bar{r}, O)}$ und von der Relation $\leq$ auf $\mathcal{V}_{(\mathcal{P}, \bar{r}, O)}$.

□

Nun kann eine Bedingung angegeben werden,unter der eine eigentliche Vereinfachung einer Multigruppenrelation $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ ein graphisches Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$ erzeugt,falls $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ von einem graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ gestiftet werden kann.

Dabei ist $(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$ ein vereinfachtes graphisches Relativ zu $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$.

Def. 3.18 *Es seien eine Multigruppenrelation $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ und eine Multiklasse K auf $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ gegeben. Ferner gelte für die Multigruppenrelation $(K, \bar{r}_K, \langle O\rangle_K)$:*

$$\bigwedge_{a,b,c \in \mathcal{P}} (\langle a\rangle_K, \langle b\rangle_K, \langle c\rangle_K) \in \bar{r}_K \succ \bigwedge_{a' \in \langle a\rangle_K} \bigvee_{b' \in \langle b\rangle_K} \bigvee_{c' \in \langle c\rangle_K} (a', b', c') \in \bar{r}$$

Dann heiße $(K, \bar{r}_K, \langle O\rangle_K)$ eine graphische Vereinfachung von $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$.

Die Menge aller eigentlichen graphischen Vereinfachungen auf einer Multigruppenrelation $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ werde mit $\mathcal{H}_{(\mathcal{P}, \bar{r}, O)} \subset \mathcal{V}_{(\mathcal{P}, \bar{r}, O)}$ bezeichnet.

Satz 3.18* $(\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\bar{r},O)}, \leq)$ *ist ein Infimums-Teilbund des vollständigen Verbandes* $(\mathcal{V}_{(\mathcal{P},\bar{r},O)}, \leq)$.

$(\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\bar{r},O)}, \leq)$ *ist ein vollständiger Verband.*

Beweis zu **3.18*** : Es sei eine Menge von eigentlichen Multiklassen $\kappa' \subset \mathcal{P}_e^\kappa$ auf einer Multigruppenrelation $(\mathcal{P}, \bar{r}, O)$ so gegeben,daß gilt:

$$\{(K, \bar{r}_K, \langle O\rangle_K) \mid K \in \kappa'\} \subset \mathcal{H}_{(\mathcal{P},\bar{r},O)}$$

Das Infimum von $\{(K, \bar{r}_K, \langle O\rangle_K) \mid K \in \kappa'\}$ auf $(\mathcal{V}_{(\mathcal{P},\bar{r},O)}, \leq)$ ist die Multigruppenrelation $(\inf \kappa', \bar{r}_{\inf \kappa'}, \langle O\rangle_{\inf \kappa'})$,wobei $\inf \kappa'$ das Infimum von κ' auf $(\mathcal{P}_e^\kappa, \leq)$ bezeichne.

Es muß gezeigt werden,daß $(\inf \kappa', \bar{r}_{\inf \kappa'}, \langle O\rangle_{\inf \kappa'})$ graphisch ist.

Es sei ein Tripel von Klassen aus $\inf \kappa'$

$$(\langle a\rangle_{\inf \kappa'}, \langle b\rangle_{\inf \kappa'}, \langle c\rangle_{\inf \kappa'}) \in \bar{r}_{\inf \kappa'}$$

mit $a, b, c \in \mathcal{P}$ beliebig gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dann

$$(a, b, c) \in \bar{r}$$

angenommen werden.

Es sei nun ein Element $a' \in \langle a\rangle_{\inf \kappa'}$ beliebig gegeben.

Dann gibt es eine endliche Reihe $a' = a_0, a_1 \ldots a_n = a$ in $\mathcal{P}$,so daß gilt:

$$\bigwedge_{i=1\ldots n} \bigvee_{K_i \in \kappa'} a_{i-1} \in \langle a_i\rangle_{K_i}$$

Damit k"nnen zwei Reihen $b = b_n \ldots b_0$ und $c = c_n \ldots c_0$ mit $b_{i-1} \in \langle b_i\rangle_{K_i}$ und $c_{i-1} \in \langle c_i\rangle_{K_i}$ für alle $i = n \ldots 1$ und mit $(a_0, b_0, c_0) \in \bar{r}$ folgendermaßen rekursiv konstruiert werden:

Es gilt $(a, b, c) = (a_n, b_n, c_n) \in \bar{r}$.

Gibt es für ein beliebiges $i = n \ldots 1$ Elemente $b_i, c_i \in \mathcal{P}$,für die $(a_i, b_i, c_i) \in \bar{r}$ gilt,so gilt nach der Definition von $\bar{r}_{K_i}$:

$$(\langle a_i\rangle_{K_i}, \langle b_i\rangle_{K_i}, \langle c_i\rangle_{K_i}) \in \bar{r}_{K_i}$$

Da die Multigruppenrelation $(K_i, \bar{r}_{K_i}, \langle O\rangle_{K_i}) \in \mathcal{H}_{(\mathcal{P},\bar{r},O)}$ graphisch ist, gibt es damit zu dem gegebenen Element $a_{i-1} \in \langle a_i\rangle_{K_i}$ Elemente $b_{i-1} \in \langle b_i\rangle_{K_i}$ und $c_{i-1} \in \langle c_i\rangle_{K_i}$,so daß gilt:

$$(a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1}) \in \bar{r}$$

Damit k"nnen zwei Reihen $b = b_n \ldots b_0$ und $c = c_n \ldots c_0$ mit $(a_0, b_0, c_0) \in \bar{r}$ so gebildet werden,daß gilt:

$$\bigwedge_{i=1\ldots n} b_{i-1} \in \langle b_i\rangle_{K_i} \wedge c_{i-1} \in \langle c_i\rangle_{K_i}$$

Nach der Infimumsbildung aus 3.16* gilt dann $b_0 \in \langle b\rangle_{\inf \kappa'}$ und $c_0 \in \langle c\rangle_{\inf \kappa'}$.

Damit ist $(\inf \kappa', \bar{r}_{\inf \kappa'}, \langle O\rangle_{\inf \kappa'})$ graphisch.

Damit gibt es zu allen Teilmengen von $\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\bar{r},O)}$ ein Infimum in $(\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\bar{r},O)}, \leq)$.

Da man leicht sieht,daß die Multigruppenrelation $(K, \bar{r}_K, \langle O\rangle_K)$ mit der Klasseneinteilung

$$K = \{\{a\} \subset \mathcal{P} \mid a \in \mathcal{P}\}$$

das gr"ßte Element von $\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\bar{r},O)}$ ist, ist damit $(\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\bar{r},O)}, \leq)$ nach II.14 ein vollständiger Verband.

□

Vereinfachungen auf graphischen Relativen und graphische Vereinfachungen auf Multigruppenrelationen k"nnen synonym aufeinander bezogen werden.

Satz 3.19 *Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ ein graphisches Relativ und ist $(\mathcal{R}, \bar{r}, O)$ die zu ihm geh"rige Multigruppenrelation,so k"nnen $\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}$ und $\mathcal{H}_{(\mathcal{R},\bar{r},O)}$ durch die folgenden Umkehrungen synonym aufeinander bezogen werden:*

3.19.1 *Zu jedem graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}') \in \mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}$ wird durch*

$$(K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}, \bar{r}_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}, \langle O\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}) \in \mathcal{H}_{(\mathcal{R},\bar{r},O)}$$

eine eigentliche graphische Vereinfachung zu $(\mathcal{R}, \bar{r}, O)$ definiert.

3.19.2 *Zu jeder eigentlichen graphischen Vereinfachung*

$$(K, \bar{r}_K, \langle O\rangle_K) \in \mathcal{H}_{(\mathcal{R},\bar{r},O)}$$

von $(\mathcal{R}, \bar{r}, O)$ wird durch $(\mathcal{P}, \mathcal{R}') \in \mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}$ mit

$$\mathcal{R}' = \{ \bigcup_{b \in \langle a\rangle_K} b \mid a \in \mathcal{R}\}$$

ein vereinfachtes graphisches Relativ zu $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ definiert.

Beweis zu **3.19.1**: Nach 3.14* ist $K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ eine Klasseneinteilung auf $\mathcal{R}$.

Ein Punkt $A \in \mathcal{P} \neq \emptyset$ sei beliebig gewählt.Dann gilt:

$$\langle O\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = \langle AA\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = \{b \in \mathcal{R} \mid b \subset AA' = O\} = \{O\}$$

Damit ist $(K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}, \bar{r}_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}, \langle O\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}})$ eine eigentliche Vereinfachung zur Multigruppenrelation $(\mathcal{R}, \bar{r}, O)$.

Es muß noch nachgewiesen werden,daß $(K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}, \bar{r}_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}, \langle O\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}})$ graphisch ist.

Es sei ein Tripel von Klassen aus $K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$

$$(\langle a\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}, \langle b\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}, \langle c\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}) \in \bar{r}_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$$

beliebig gegeben ($a, b, c \in \mathcal{R}$).
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dann

$(a, b, c) \in \bar{r}$

angenommen werden.
Nach 3.13* gilt damit $a \subset b \circ c$.
Nach 1.4 gibt es damit Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ mit $AB = a$,$BC = b$ und $CB = c$.
Es werde ein $a_1 \in \langle AB \rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$ beliebig gewählt.
Es gibt Punkte $A_1, B_1 \in \mathcal{P}$ mit $a_1 = A_1B_1$.
Nach 3.15 gilt dann: $A_1B_1 = a_1 \subset \bigcup \langle AB \rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = AB' \succ A_1\, AB'\, B_1$

Außerdem gilt $AB' \subset AC' \circ CB'$.
Damit gilt:

$$\begin{aligned} A_1\, AB'\, B_1 &\succ A_1\, AC' \circ CB'\, B_1 \\ &\succ \bigvee_{C_1 \in \mathcal{P}} A_1\, AC'\, C_1 \wedge C_1\, CB'\, B_1 \\ &\succ \bigvee_{C_1 \in \mathcal{P}} A_1C_1 \subset AC' \wedge C_1B_1 \subset CB' \quad AC', CB' \in \dot{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

Außerdem gilt $A\, AC'\, C \succ AC \subset AC'$. Entsprechend gilt auch $BC \subset BC'$.
Damit gilt: $A_1C_1 \in \langle AC \rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge C_1B_1 \in \langle CB \rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$
Außerdem gilt $A_1B_1 \subset A_1C_1 \circ C_1B_1$.
Damit gilt $(A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1) \in \bar{r}$.
Damit sind mit $b' := A_1C_1$ und $c' := C_1B_1$ geeignete $b' \in \langle b \rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$,$c' \in \langle c \rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$ gefunden mit $(a', b', c') \in \bar{r}$.
$(K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}, \bar{r}_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}, \langle O \rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}})$ ist also graphisch.
Damit ist $(K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}, \bar{r}_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}, \langle O \rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}})$ eine eigentliche graphische Vereinfachung von $(\mathcal{R}, \bar{r}, O)$.
□

Beweis zu **3.19.2**: $\mathcal{R}'$ ist eine Menge nicht leerer symmetrischer Relationen,da $\mathcal{R}$ aus nicht leeren symmetrischen Relationen besteht und alle Klassen einer Klasseneinteilung K nicht leer sind. Außerdem gilt:

$$\bigcup_{b \in \langle O \rangle_K} b = \bigcup_{b \in \{O\}} b = O \in \mathcal{R}'$$

Um zu zeigen,daß $(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$ ein graphisches Relativ ist, müssen damit nur noch die Bedingungen 1.2_ III und 1.2_ IV nachgewiesen werden.
Zu 1.2_ III:Es seien Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ beliebig gewählt.

Dann gilt: $(A,B) \in AB \subset \bigcup \langle AB \rangle_K \in \mathcal{R}'$

Damit gibt es eine Relation $a' \in \mathcal{R}'$ mit $A\,a'\,B$.

Angenommen, $\bigcup \langle a \rangle_K$ $(a \in \mathcal{R})$ sei eine weitere Relation in $\mathcal{R}'$ mit

$A \bigcup \langle a \rangle_K \, B$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A \bigcup \langle a \rangle_K \, B \quad &\succ \quad \bigvee_{b \in \langle a \rangle_K} A\,b\,B \\
&\succ \quad \bigvee_{b \in \langle a \rangle_K} AB = b \\
&\succ \quad AB \in \langle a \rangle_K \\
&\succ \quad \langle AB \rangle_K = \langle a \rangle_K \\
&\succ \quad \bigcup \langle AB \rangle_K = \bigcup \langle a \rangle_K
\end{aligned}$$

Damit gibt es genau eine Relation $a' \in \mathcal{R}'$ mit $A\,a'\,B$.

Im folgenden werde diese eindeutig zu A, B gegebene Relation $\bigcup \langle AB \rangle_K$ mit AB' bezeichnet.

Zu 1.2_ IV:Es seien Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben.

Dann gilt $(AB, AC, CB) \in \bar{r}$.

Damit gilt auch $(\langle AB \rangle_K, \langle AC \rangle_K, \langle CB \rangle_K) \in \bar{r}_K$.

Es seien Punkte $A_1, B_1 \in \mathcal{P}$ beliebig gewählt.Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A_1\,AB'\,B_1 \quad &\succ \quad A_1 \bigcup \langle AB \rangle_K \, B_1 \\
&\succ \quad \bigvee_{a_1 \in \langle AB \rangle_K} A_1\,a_1\,B_1 \\
&\succ \quad \bigvee_{a_1 \in \langle AB \rangle_K} a_1 = A_1 B_1 \\
&\succ \quad A_1 B_1 \in \langle AB \rangle_K
\end{aligned}$$

Da die vereinfachte Multigruppenrelation $(K, \bar{r}_K, \langle O \rangle_K)$ graphisch ist, gibt es damit Relationen $b_1 \in \langle AC \rangle_K$ und $c_1 \in \langle CB \rangle_K$ mit $(A_1 B_1, b_1, c_1) \in \bar{r}$.

Damit gilt $A_1 B_1 \subset b_1 \circ c_1$.

Damit gibt es einen Punkt $C_1 \in \mathcal{P}$ mit $b_1 = A_1 C_1$ und $c_1 = C_1 B_1$.

Damit gilt weiterhin:

$A_1 C_1 = b_1 \in \langle AC \rangle_K \succ A_1 C_1 \subset \bigcup \langle AC \rangle_K = AC' \succ A_1\,AC'\,C_1$

Entspechend gilt auch $C_1\,CB'\,B_1$.

Damit gilt für beliebige Punkte $A_1, B_1 \in \mathcal{P}$:

$$A_1\,AB'\,B_1 \succ \bigvee_{C_1 \in \mathcal{P}} A_1\,AC'\,C_1 \wedge C_1\,CB'\,B_1$$

Damit gilt für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ $AB' \subset AC' \circ CB'$.

Damit ist $(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$ ein graphisches Relativ.

$\mathcal{R}' \subset \dot{\mathcal{R}}$ gilt,da alle Relationen aus $\mathcal{R}'$ als Vereinigung von Relationen aus $\mathcal{R}$ definiert sind.

Damit ist $(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$ ein zu $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ vereinfachtes graphisches Relativ.

$\square$

Beweis zu **3.19**: Es muß gezeigt werden,daß die Verfahren 3.19.1 und 3.19.2 einander umkehren.

$(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$ sei ein zu $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ vereinfachtes graphisches Relativ.

Dann ist $(K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}, \bar{r}_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}, \langle O\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}})$ seine nach 3.19.1 definierte eigentliche graphische Vereinfachung auf $(\mathcal{R}, \bar{r}, O)$.

$(\mathcal{P}, \mathcal{R}'')$ sei das dazu nach 3.19.2 definierte graphische Relativ.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'' &= \{ \bigcup_{b \in \langle a\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}} b \mid a \in \mathcal{R}\} \\
&= \{ \bigcup_{b \in \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}} b \mid A, B \in \mathcal{P}\} \\
&= \{AB' \mid A, B \in \mathcal{P}\} && \text{nach 3.15} \\
&= \mathcal{R}'
\end{aligned}$$

Damit gilt $(\mathcal{P}, \mathcal{R}') = (\mathcal{P}, \mathcal{R}'')$.

$(K, \bar{r}_K, \langle O\rangle_K)$ sei nun eine eigentliche graphische Vereinfachung von $(\mathcal{R}, \bar{r}, O)$.

$(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$ sei das dazu nach 3.19.2 definierte graphische Relativ.

$(K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}, \bar{r}_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}, \langle O\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}})$ sei die zu $(\mathcal{P}, \mathcal{R}')$ nach 3.19.1 definierte eigentliche graphische Vereinfachung von $(\mathcal{R}, \bar{r}, O)$.

Dann gilt für alle Relationen $AB \in \mathcal{R}$ $(A, B \in \mathcal{P})$:

$$\begin{aligned}
\langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} &= \{b \in \mathcal{R} \mid b \subset AB'\} && \text{nach 3.15} \\
&= \{b \in \mathcal{R} \mid b \subset \bigcup \langle AB\rangle_K\} \\
&= \{b \in \mathcal{R} \mid \{b\} \subset \langle AB\rangle_K\} && \text{Kürzungsregel 1.9_ II} \\
&= \{b \in \mathcal{R} \mid b \in \langle AB\rangle_K\} \\
&= \langle AB\rangle_K
\end{aligned}$$

Damit gilt $K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = K$.

Damit gilt auch $(K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}, \bar{r}_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}, \langle O\rangle_{K_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}) = (K, \bar{r}_K, \langle O\rangle_K)$.

Damit kehren die Verfahren 3.19.1 und 3.19.2 einander um.

□

Nach Satz 3.19 k"nnen die Vereinfachungen zu einem graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ aus den graphischen Vereinfachungen der zu $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ geh"rigen Multigruppenrelation $(\mathcal{R}, \bar{r}, O)$ konstruiert werden. Diese graphischen Vereinfachungen wiederum sind in der Definition 3.18 algebraisch definiert.

Damit gibt der Satz 3.19 ein algebraisches Verfahren zur Konstruktion vereinfachter graphischer Relative an.

Weiterhin bietet der Satz 3.19 eine teilweise Antwort auf die Frage,wann eine gegebene Multigruppenrelation $(\mathcal{R}, \bar{r}, O)$ bis auf Isomorphie von einem graphischen Relativ erzeugt werden kann.

Schließlich kann der Satz 3.19 dazu benutzt werden,zu zeigen,daß für jedes graphische Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ $(\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}, \leq)$ ein vollständiger Verband ist.

Satz 3.19* *Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ ein graphisches Relativ und ist $(\mathcal{R}, \bar{r}, O)$ die zu ihm geh"rige Multigruppenrelation,so gilt*

$$(\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}, \leq) \simeq (\mathcal{H}_{(\mathcal{R},\bar{r},O)}, \leq)$$

Beweis zu **3.15**: Es seien zwei vereinfachte graphische Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{R}_1)$ und $(\mathcal{P}, \mathcal{R}_2)$ zu einem graphischen Relativ $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ beliebig vorgegeben.

Dann gilt für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} AB^1 \subset AB^2 \quad &\asymp \quad \bigcup \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}} \subset \bigcup \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}}} \\ &\asymp \quad \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}} \subset \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}}} \qquad \text{nach 1.9\_ II} \end{aligned}$$

Damit gilt auf $\mathcal{H}_{(\mathcal{R},\bar{r},O)}$:

$$\begin{aligned} &(K_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}}, \bar{r}_{K_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}}}, \langle O\rangle_{K_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}}}) \leq (K_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}, \bar{r}_{K_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}}, \langle O\rangle_{K_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}}) \\ \asymp \quad &\bigwedge_{A,B\in\mathcal{P}} \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}} \subset \langle AB\rangle_{K_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}}} \\ \asymp \quad &\bigwedge_{A,B\in\mathcal{P}} AB^1 \subset AB^2 \end{aligned}$$

Gilt nun auf $\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}$ $(\mathcal{P}, \mathcal{R}_2) \leq (\mathcal{P}, \mathcal{R}_1)$,so gilt $\mathcal{R}_2 \subset \dot{\mathcal{R}}_1$.

Dann gilt für alle Punkte $A, B \in \mathcal{P}$: $AB^2 \in \dot{\mathcal{R}}_1$.

Damit gilt: $\bigwedge_{A,B\in\mathcal{P}} AB^1 \subset AB^2$.

Es gelte umgekehrt $\bigwedge_{A,B\in\mathcal{P}} AB^1 \subset AB^2$.

Für alle Punkte $C, D \in \mathcal{P}$ und für beliebige Punkte $E, F \in \mathcal{P}$ gilt dann:

$$E\,CD^2\,F \succ CD^2 = EF^2 \succ EF^1 \subset EF^2 = CD^2$$

Damit gilt für alle Punkte $C, D \in \mathcal{P}$ $CD^2 \in \dot{\mathcal{R}}_1$.
Damit gilt $\mathcal{R}_2 \subset \dot{\mathcal{R}}_1$.
Damit gilt $(\mathcal{P}, \mathcal{R}_2) \leq (\mathcal{P}, \mathcal{R}_1)$.
Damit gilt

$$\left(\bigwedge_{A,B \in \mathcal{P}} AB^1 \subset AB^2 \right) \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail (\mathcal{P}, \mathcal{R}_2) \leq (\mathcal{P}, \mathcal{R}_1)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & (K_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}}, \bar{r}_{K_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}}}, \langle O \rangle_{K_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}}}) \leq (K_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}, \bar{r}_{K_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}}, \langle O \rangle_{K_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}}) \\ \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail \quad & (\mathcal{P}, \mathcal{R}_2) \leq (\mathcal{P}, \mathcal{R}_1) \end{aligned}$$

Damit gilt $(\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}, \leq) \simeq (\mathcal{H}_{(\mathcal{R},\bar{r},O)}, \leq)$.
Damit ist $(\mathcal{H}_{(\mathcal{P},\mathcal{R})}, \leq)$ ein vollständiger Verband.
$\square$

A Beispiele affiner Graphen

Auf den folgenden Seiten wird eine bis auf Isomorphie vollständige Liste der affinen Graphen mit 4–8 Punkten und ihrer zugehörigen Multigruppen zusammengestellt.

Nicht mit aufgelistet wurden die trivialen Graphen,die nur aus einer Geraden bestehen.

Die affinen Graphen wurden mit dem Computer berechnet,indem im wesentlichen alle möglichen Konfigurationen von 4–8 Punkten darauf geprüft wurden,ob sie affine Graphen seien.

Einige Anmerkungen zu den einzelnen Graphen sind in der folgenden Liste zusammengestellt:

S.82 Dieser Graph enspricht der affinen Ebene mit zwei Punkten pro Gerade.

S.83 Dieser Graph entspricht dem zyklischen Graphen der Ordnung 4.

S.84 Dieser Graph entspricht dem zyklischen Graphen der Ordnung 5.

S.85 Dieser Graph entspricht dem zyklischen Graphen der Ordnung 6.

S.86 Dieser Graph ist eine Geradeneinteilung mit 2 Geraden und 3 Punkten auf jeder Geraden.

S.87 Dieser Graph ist eine Geradeneinteilung mit 3 Geraden mit je 2 Punkten.

S.88 Dieser Graph entspricht dem zyklischen Graphen der Ordnung 7.

S.89 Dieser Graph ist eine Geradeneinteilung mit zwei Geraden und 3 bzw . 4 Punkten pro Gerade.

S.90 Dieser Graph entspricht der dreidimensionalen Geometrie mit 2 Punkten pro Gerade.

S.97 Dieser Graph ist der zyklische Graph der Ordnung 8.

S.99 Dieser Graph ist eine Geradeneinteilung mit 2 Geraden und 4 Punkten auf jeder Geraden.

S.100 Dieser Graph ist eine Geradeneinteilung mit 2 Geraden mit 3 bzw . 5 Punkten.

S.101 Dieser Graph ist eine Geradeneinteilung mit 4 Geraden und 2 Punkten auf jeder Geraden.

$\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{A}}$

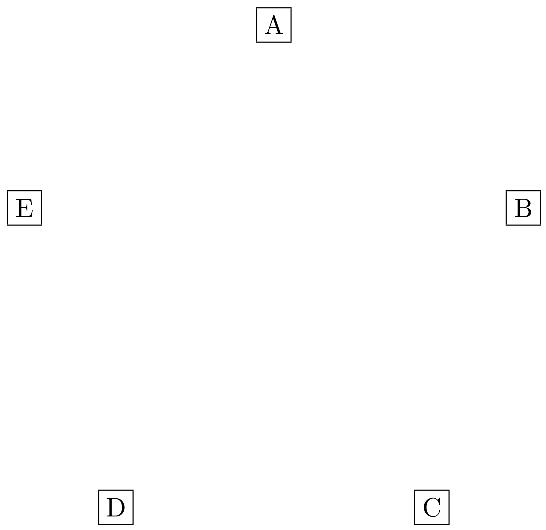
$\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{B}}$

	1	2	3
1	0	3	2
2	3	0	1
3	2	1	0

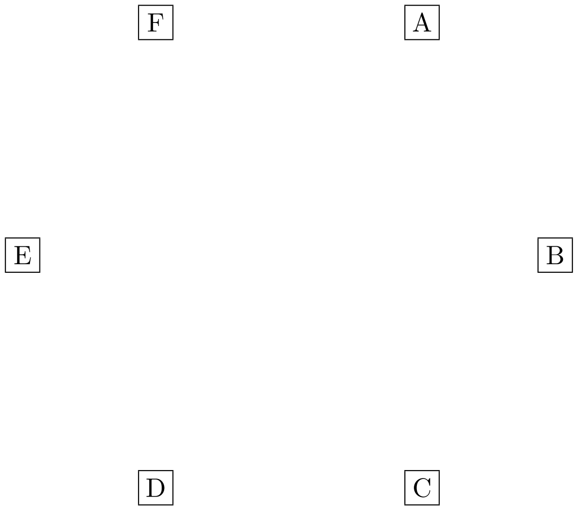
$\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{B}}$

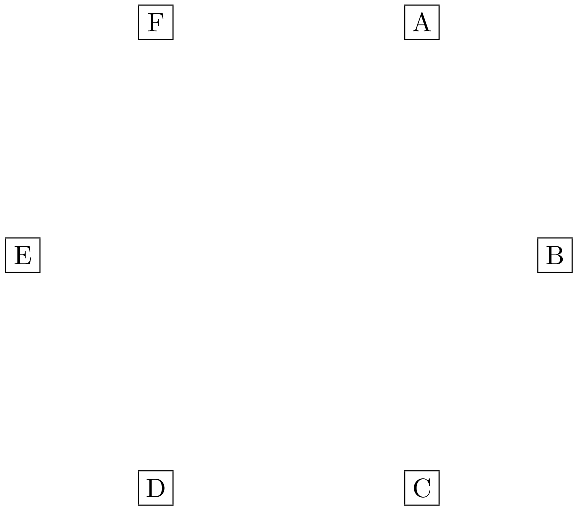
	1	2
1	0,2	1
2	1	0



	1	2
1	0,2	1,2
2	1,2	0,1



	1	2	3
1	0,2	1,3	2
2	1,3	0,2	1
3	2	1	0



	1	2
1	0,1	2
2	2	0,1

F A

E B

D C

	1	2
1	0	2
2	2	0,1,2

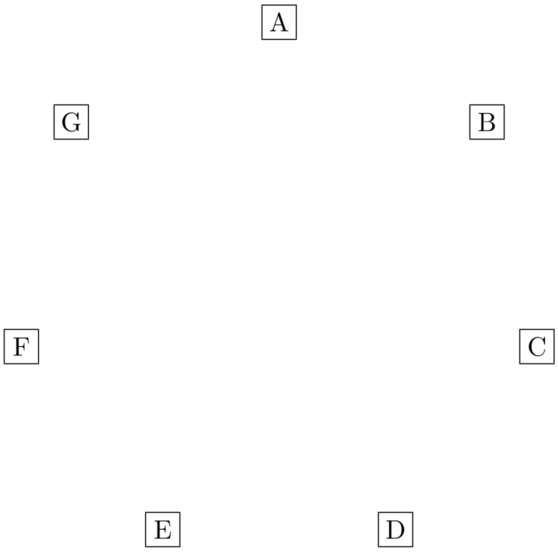
$\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\text{G}}$ $\boxed{\text{B}}$

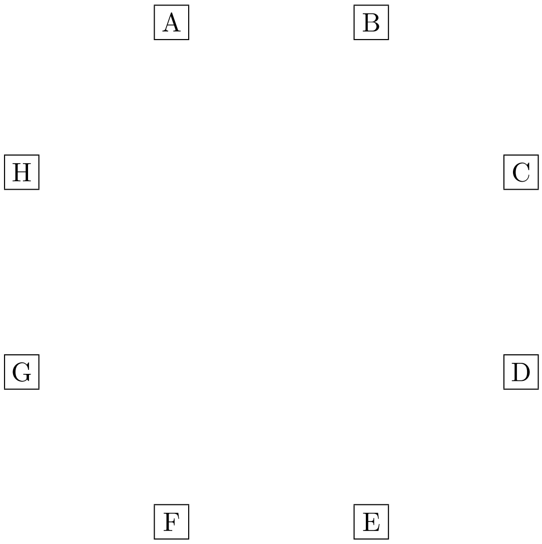
$\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{C}}$

$\boxed{\text{E}}$ $\boxed{\text{D}}$

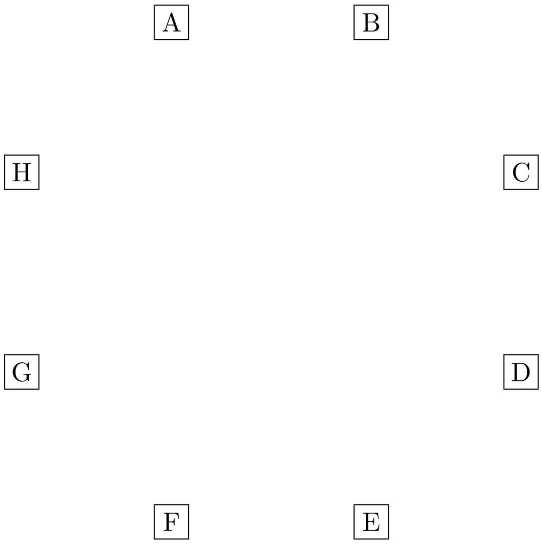
	1	2	3
1	0,2	1,3	2,3
2	1,3	0,3	1,2
3	2,3	1,2	0,1



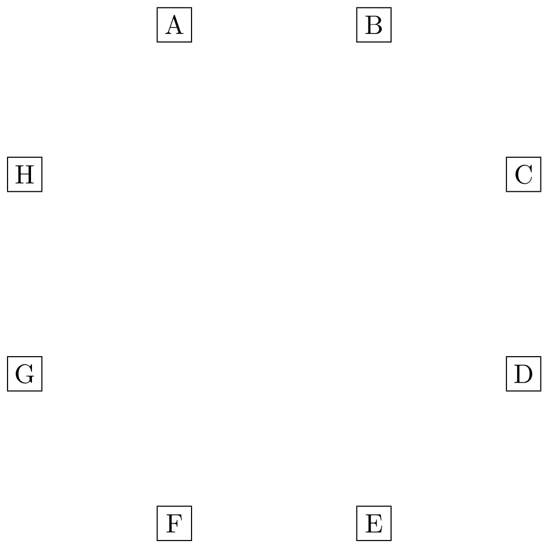
	1	2
1	0,1	2
2	2	0,1



	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	6	2	7	3	5
2	4	0	5	1	3	7	6
3	6	5	0	7	2	1	4
4	2	1	7	0	6	5	3
5	7	3	2	6	0	4	1
6	3	7	1	5	4	0	2
7	5	6	4	3	1	2	0



	1	2	3	4	5
1	0,3	5	1	5	2,4
2	5	0	4	3	1
3	1	4	0	2	5
4	5	3	2	0	1
5	2,4	1	5	1	0,3



	1	2	3	4
1	0,2	1	4	3
2	1	0	3	4
3	4	3	0,2	1
4	3	4	1	0,2

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$

$\boxed{H}$ $\boxed{C}$

$\boxed{G}$ $\boxed{D}$

$\boxed{F}$ $\boxed{E}$

	1	2	3	4
1	0,2,3,4	1	1	1
2	1	0	4	3
3	1	4	0	2
4	1	3	2	0

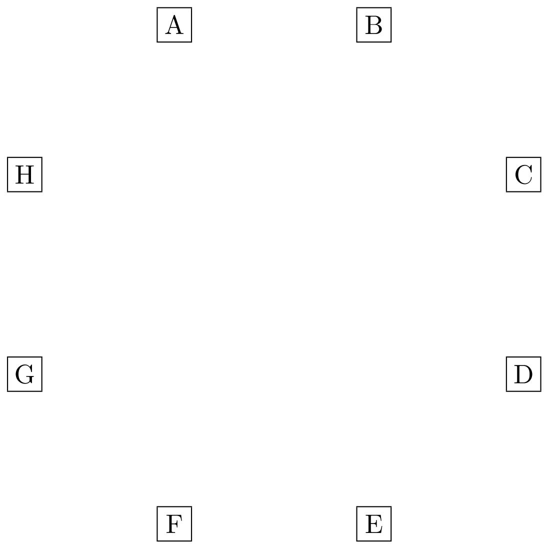
$\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$

$\boxed{\text{H}}$ $\boxed{\text{C}}$

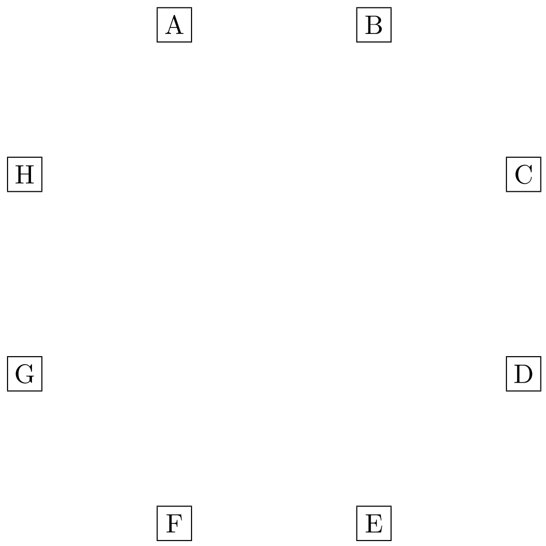
$\boxed{\text{G}}$ $\boxed{\text{D}}$

$\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{E}}$

	1	2	3
1	0,2	1	3
2	1	0	3
3	3	3	0,1,2



	1	2	3
1	0,3	3	1,2
2	3	0	1
3	1,2	1	0,3



	1	2	3
1	0,1	2,3	2
2	2,3	0,1	1
3	2	1	0

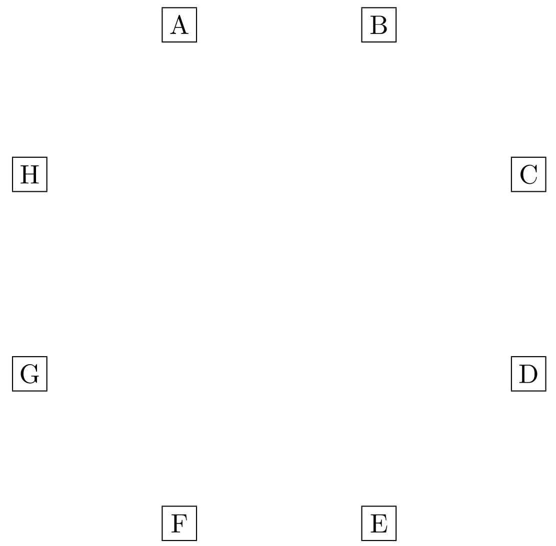
$\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$

$\boxed{\text{H}}$ $\boxed{\text{C}}$

$\boxed{\text{G}}$ $\boxed{\text{D}}$

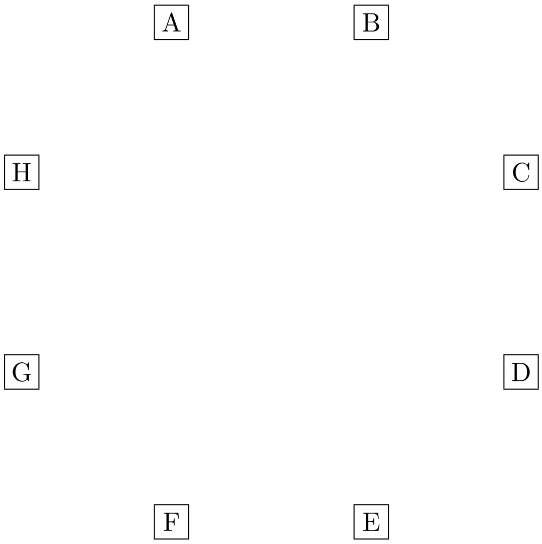
$\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{E}}$

	1	2	3	4
1	0,2	1,3	2,4	3
2	1,3	0,4	1,3	2
3	2,4	1,3	0,2	1
4	3	2	1	0

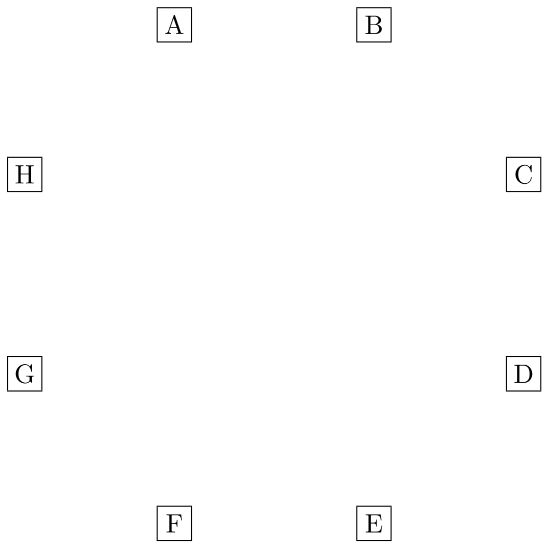


ist ein vereinfachter Graph zum zyklischen Graphen auf Seite 97.

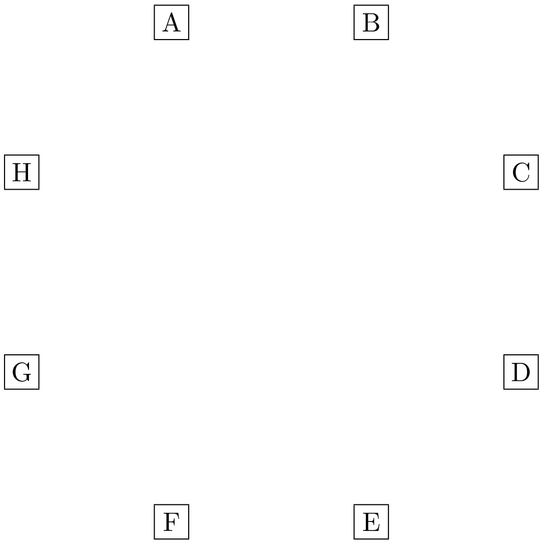
	1	2
1	0,1,2	1,2
2	1,2	0,1



	1	2
1	0,1	2
2	2	0,1



	1	2
1	0,1	2
2	2	0,1



	1	2
1	0	2
2	2	0,1,2

Literatur

[1] Hans-Joachim Arnold
Affine Relative
Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik Duisburg
1987

[2] Hans-Joachim Arnold
Vorlesungen zur geometrischen Relationenalgebra 1-3

[3] Stephen D. Comer
Combinatorial aspects of relations
Algebra Universalis 18 (1984) S.77-94

[4] G. Szasz
Einführung in die Verbandstheorie
Verlag der ungarischen Akademie der Wissenschaften
Budapest 1962

Hiermit versichere ich,daß ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.